Методическая разработка учителя математики
гимназии №22, города Майкопа, Чумаковой Марии Евгеньевны.

Тема: Метод различного подсчета объема пирамиды.

Одной из проблем учащихся является изучение стереометрии. Школьникам тяжело представлять пространственные фигуры, они привыкли иметь делом с плоскостными фигурами, лежащих только в плоскости классной доски или ученической тетради. В связи с чем у них теряется интерес к предмету, и многие из них начинают считать стереометрию трудным школьным предметом.

Трудности в изучении стереометрии вызваны тем, что зрительное восприятие геометрических объектов не всегда соответствует тем закономерностям, которыми этот объект обладает. Например, скрещивающиеся прямые могут выглядеть как пересекающиеся или как параллельные прямые, прямой угол может выглядеть как острый или тупой угол, равные отрезки могут выглядеть как отрезки разной длины, и т.д.

Самую важную роль в геометрических задачах имеет чертеж. Он является залогом дальнейшего правильного решения поставленной задачи. К сожалению, при изучении стереометрии учитель очень мало времени и внимания уделяет выполнения чертежа. Он иногда не замечает ошибок, не уделяет внимания учету выбора положения фигуры в пространстве для наиболее рационального решения, не обсуждает с учащимися чертеж к задаче, а сразу приступает к его построению, не уделяет внимания технике выполнения чертежа. Поэтому школьники не понимая важность чертежа в решении задачи, допускают ошибки при построении изображения, в результате чего усложняют себе дальнейшее решение стереометрических задач.

Предлагаю метод решения основных геометрических задач, не требующий специального геометрического построения.

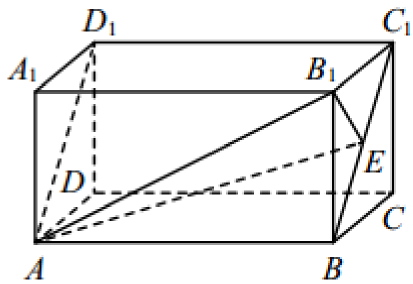
Метод различного подсчета объема пирамиды.

Метод применяется при решении основных стереометрических задач: угол между плоскостями, угол между прямой и плоскостью, расстояние между прямыми, расстояние от точки до плоскости.

Задача 1.(ЕГЭ 2013, пробный экзамен) В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ $AB = 2$, $AD = AA_1 = 1$. Найдите угол между прямой AB_1 и плоскостью ABC_1.

Решение.

Отрывок оригинального решения:



Плоскости ABC_1 и BCC_1 перпендикулярны. Перпендикуляр из точки B_1 к плоскости ABC_1 лежит в плоскости BCC_1 и пересекает прямую BC_1 в точке E. Значит, искомый угол равен углу B_1AE.

«Метод пирамидок» не требует обоснования положения основания перпендикуляра.

Чтобы найти угол мужду прямой AB_1 и плоскостью ABC_1, опустим перпендикуляр B_1H. Угол B_1AH – искомый.

Рассмотрим пирамиду ABB_1C_1. Посчитаем объем этой пирамиды двумя способами.

$V_{ABB_1C_1} = \frac{1}{3} S_{ABC_1} \cdot B_1H$ или $V_{ABB_1C_1} = \frac{1}{3} S_{ABB_1} \cdot B_1C_1$

$\angle ABC_1 = 90^0$ по теореме о трех перпендикулярах. По Теореме Пифагора из треугольников BCC_1 и ABB_1 находим $BC_1 = \sqrt{2}$ и $AB_1 = \sqrt{5}$.

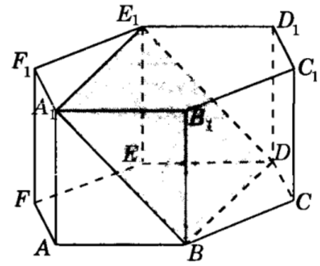
$$B_1H = \frac{S_{ABB_1} \cdot B_1C_1}{S_{ABC_1}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1}{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\angle B_1AH = \frac{B_1H}{AB_1} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

Ответ: $\arcsin\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Задача 2. В правильной шестиугольной призме $A \dots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите угол между прямой CC_1 и плоскостью BDE_1.

Решение.



1) Так как $CC_1 // BB_1$, то угол между прямой CC_1 и плоскостью BDE_1 равен углу между прямой BB_1 и плоскостью BDE_1
2) Пусть $x -$ расстояние от точки B_1 до плоскости BDE_1, тогда $sin\angle(B_1, BDE_1) = \frac{x}{BB_1} = x$.
3) Рассмотрим пирамиду B_1BDE_1:

$$V_{B_1BDE_1} = \frac{1}{3} S_{A_1E_1B_1} \cdot BB_1$$

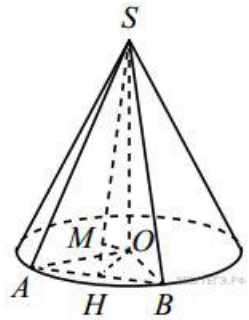
$$V_{B_1BDE_1} = \frac{1}{3} S_{BA_1E_1} \cdot x$$

$$x = \frac{S_{A_1E_1B_1} \cdot BB_1}{S_{BA_1E_1}},$$

4) $x = \frac{S_{A_1E_1B_1} \cdot BB_1}{S_{BA_1E_1}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot 1}{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \angle(B_1, BDE_1) = 45^0$.

Ответ: 45^0.

Задача 3.(ЕГЭ 2013, досрочный экзамен) Радиус основания конуса равен 8, а его высота равна 15. Плоскость сечения содержит вершину конуса и хорду основания, длина которой равна 14. Найдите расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения.



Решение.

Пусть $x -$ искомое расстояние.

1) Рассмотрим пирамиду $ABOS$:

$$V_{ABOS} = \frac{1}{3} S_{AOB} \cdot SO$$

$$V_{ABOS} = \frac{1}{3} S_{ASB} \cdot x$$

$$x = \frac{S_{AOB} \cdot SO}{S_{ASB}},$$

2) Из треугольника AOS по ТП: $AS = \sqrt{AO^2 + SO^2} = \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17$,
3) Из треугольника AOB по ТП: $OH = \sqrt{AO^2 - AH^2} = \sqrt{64 - 49} = \sqrt{15}$,
4) Из треугольника ASB по ТП: $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{289 - 49} = \sqrt{240} = 4\sqrt{15}$,

5) $x = \frac{S_{AOB} \cdot SO}{S_{ASB}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 14 \cdot \sqrt{15} \cdot 15}{\frac{1}{2} \cdot 14 \cdot 4\sqrt{15}} = \frac{15}{4}$.

Ответ: $\frac{15}{4}$.

Замечание. Для решения таким способом, не требовалось доказать, что искомое расстояние MO.

Задача 4. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 2, боковые ребра равны 3, точка $D -$ середина ребра CC_1. Найдите расстояние от вершины С до плоскости ADB_1.

Решение.

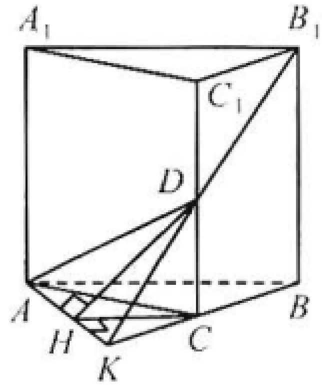


Рисунок из оригинального решения, для решения «методом пирамидок» не требуется такой рисунок и обоснования расположения основания перпендикуляра

Пусть $x -$ искомое расстояние и расстояние от точки B_1 до плоскости $ACC_1 - BH$.

1) Рассмотрим пирамиду $ACDB_1$:

$$V_{ACDB_1} = \frac{1}{3} S_{ACD} \cdot BH$$

$$V_{ABOS} = \frac{1}{3} S_{ADB_1} \cdot x$$

$$x = \frac{S_{ACD} \cdot BH}{S_{ADB_1}},$$

2) Плоскости ACC_1 и $A_1C_1B_1$ перпендикулярны, поэтому $BH -$ высота треугольника $A_1C_1B_1$. $BH = \sqrt{3}$,

Для равностороннего треугольника, можно выучить формулы высоты и площади

3) Из треугольника ACD по ТП: $AD = \sqrt{AC^2 + DC^2} = \sqrt{4 + 2{,}25} = \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$, так как фигура правильная $DB_1 = 2{,}5$,

4) Из треугольника AA_1B_1 по ТП: $AB_1 = \sqrt{{AA_1}^2 + {A_1B_1}^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$,

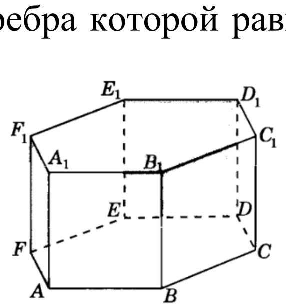
5) Если DK —высота AA_1B_1, то по ТП: $DK = \sqrt{AD^2 - AK^2} = \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{13}{4}} = \sqrt{3}$,

6) $x = \frac{S_{ACD} \cdot BH}{S_{ADB_1}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3}}{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{13} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{13}}{13}$.

Задача 5. В правильной шестиугольной призме $A \ldots F_1$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми DC_1 и A_1E_1.

Решение.



1) $C_1D // A_1F$, то $d(DC_1;\ A_1E_1) = d(C_1;\ A_1FE_1)$,

2) Пусть $x -$ искомое расстояние.

Рассмотрим пирамиду$C_1FA_1E_1$:

$$V_{C_1FA_1E_1} = \frac{1}{3} S_{A_1C_1E_1} \cdot FF_1$$

$$V_{C_1FA_1E_1} = \frac{1}{3} S_{A_1E_1F} \cdot x$$

$$x = \frac{S_{A_1C_1E_1} \cdot FF_1}{S_{A_1E_1F}},$$

3) В треугольнике $A_1C_1E_1$ все стороны по $\sqrt{3}$, так как фигура правильная, то $S_{A_1C_1E_1} = \frac{(\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$,
4) Из треугольника AFA_1 по ТП: $A_1F = \sqrt{2}$,
5) Пусть в треугольнике A_1FE_1 FK −высота, то по ТП: $FK = \sqrt{A_1F^2 - A_1K^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$
6) $x = \frac{S_{A_1C_1E_1} \cdot FF_1}{S_{A_1E_1F}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}}{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Ответ: $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Задания для самостоятельного решения.

1. В правильной шестиугольной пирамиде $SABCDEF$, боковые ребра которой равны 2, а стороны основания-1, найдите косинус угла между прямой AC и плоскостью SAF.
2. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ сторона основания $AB = 4\sqrt{2}$, боковое ребро $SA = \sqrt{17}$. Найдите расстояние от вершины B до плоскости SDA.
3. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$, все ребра которой равны 1, найдите расстояние между прямыми SA и BC.