Гагарина Наталия Юрьевна

Государственное общеобразовательное учреждение

"Физико-математический лицей-интернат"

Республика Коми, г. Сыктывкар

Учитель математики

**Метод объемов**

**Методическая разработка**

*В пособии собраны методические материалы по использованию метода объемов при решении некоторых типов стереометрических задач. Пособие адресовано учителям математики образовательных организаций, осуществляющих образовательную деятельность по предмету в 10-11 классах.*

**Введение**

В школьном курсе стереометрии довольно часто приходится сталкиваться с задачами на определение расстояния от точки до плоскости, расстояния между скрещивающимися прямыми и угла между плоскостями. Нередко задачи указанных типов вызывают у учащихся затруднения. Задания части 2 Единого государственного экзамена по стереометрии большей частью посвящены именно вычислению расстояний и углов в пространстве, поэтому решению таких задач необходимо уделить особое внимание. В данном пособии предлагается для этой цели применить метод объемов, который является очень удобным, понятным и легко запоминающимся, но, к сожалению, зачастую не рассматриваемым в школьной программе. При использовании метода объемов необходимо знать ряд теорем, формулировки и доказательства которых приведены в данном пособии. Пособие содержит подборку задач различного уровня сложности, при решении которых удобно использовать метод объемов.

**Метод объёмов**

Метод объёмов состоит в следующем: выражая объем какого-нибудь тела двумя способами и приравнивая полученные величины, получаем требуемый результат.

Указанный метод удобно использовать при решении стереометрических задач следующих типов:

1. Нахождение расстояния от точки до плоскости.
2. Нахождение угла между плоскостями.
3. Нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми.

**1 тип. Нахождение расстояния от точки до плоскости**

*Задача 1.1.* Вединичном кубе ABCDA1B1C1D1 найти расстояние от точки A до плоскости BDA1.

*Решение:*

H

A

B

C

D

A1

B1

C1

D1

Пусть AH – перпендикуляр к плоскости A1DB, отметим, что нам не нужно будет находить местоположение точки H, в этом и есть преимущество метода объёмов.

Рассмотрим пирамиду A1ADB, пусть *V* – объём этой пирамиды.

С одной стороны, .

С другой стороны, .

Приравниваем полученные выражения:

, откуда AH = .

*Задача 1.2.* В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD, все рёбра которой равны 1, найти расстояние от точки A до плоскости SCD.

*Задача 1.3.* В правильной шестиугольной пирамиде SABCDEF, стороны основания которой равны 1, а боковые рёбра равны 2, найти расстояние от точки A до плоскости SDE.

*Задача 1.4.* В правильной шестиугольной призме ABCDEFA1B1C1D1E1F1, все рёбра которой равны 1, найти расстояние от точки A до плоскости BFE1.

*Задача 1.5.* В правильной шестиугольной пирамиде SABCDEF, стороны основания которой равны 1, а боковые рёбра равны 2, найти расстояние от точки A до плоскости SBC.

**2 тип. Нахождение угла между плоскостями**

**Теорема 1** (вычисление объёма тетраэдра через площади двух граней, двугранный угол и ребро). Пусть *P* и *Q* – площади двух граней тетраэдра*, а* – длина общего ребра, *α* – величина двугранного угла между этими гранями. Тогда объем пирамиды может быть вычислен по формуле .

Доказательство: Пусть *S*ABC = *P*, *S*DBC = *Q*, тогда BC = *a*. Пусть DH – высота пирамиды, DM = *d* – высота грани DBC.

D

C

A

B

M

H

α

d

*a*

При этом *S*DBC =  *,* значит, *d* =

Рассмотрим далее ∆DHM: , значит,   
DH =

Получим, *V*=

*Задача 2.1.* В единичном кубе ABCDA1B1C1D1 найти синус угла между плоскостями ADD1 и BDC1.

E

A

B

C

D

A1

B1

C1

D1

*Решение*:

Угол между плоскостями (ADD1) и (BDC1) равен углу между плоскостями (BDC1) и (BB1C).

Рассмотрим треугольную пирамиду C1DBC, пусть *V* – объём этой пирамиды. Пусть *P* и *Q* – площади граней C1DB и C1CB*, α* – угол между этими гранями, *a* – длина их общего ребра. Тогда по теореме 1 , где .

С одной стороны, ,

С другой стороны, .

Приравниваем полученные выражения:

= , откуда .

*Задача 2.2.* В кубе ABCDA1B1C1D1 найти синус угла между плоскостями ABC и CB1D1.

*Задача 2.3.* В правильной треугольной призме ABCA1B1C1, все рёбра которой равны 1, найти тангенс угла между плоскостями ABC и CA1B1.

*Задача 2.4.* В основании пирамиды ABCD лежит прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AC, DC – высота пирамиды. AB = 1, BC = 3, CD = 3. Найти величину двугранного угла между плоскостями ADB и ADC.

*Задача 2.5.* В основании пирамиды ABCD лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB, равной 4. Высота пирамиды равна 2, а ее основание совпадает с серединой AC. Найти величину двугранного угла между гранями ABD и BCD.

**3 тип. Нахождение расстояния между скрещивающимися прямыми**

**Теорема 2** (вычисление объёма тетраэдра через два противоположных ребра, расстояние и угол между ними). Пусть *a* и *b* – длины двух противоположных рёбер тетраэдра, *d* – расстояние, *φ* – угол между ними. Тогда объём тетраэдра может быть вычислен по формуле .

Доказательство: рассмотрим тетраэдр DABC, пусть AB и CD – рёбра. Достроим тетраэдр до параллелепипеда, проведя через каждое ребро плоскость, параллельную противоположному ребру. Площади граней AKBM и LCQD равны 1/2∙*a∙b∙*, расстояние между ними *d.* Тогда

, где *V1* – объём параллелепипеда.

Отсекая от параллелепипеда 4 треугольные пирамиды, получим рассматриваемый тетраэдр ABCD.

A

В

D

L

Q

M

K

.

Аналогично .

Итак,

*Задача 3.1.* В единичном кубе ABCDA1B1C1D1 найти расстояние между прямыми AB1 и BC1.

A

B

C

D

A1

B1

C1

D1

60°

*Решение*:

Рассмотрим пирамиду ABB1C1, пусть *V* – объём этой пирамиды.

С одной стороны, .

С другой стороны, (по теореме 2), где *a* и *b* – длины противоположных рёбер AB1 и BC1, *d* – расстояние между ними, *φ* – угол между рёбрами AB1 и BC1 (он равен 60°, т.к. стороны треугольника AD1B1 – диагонали равных квадратов). Значит, .

Приравниваем полученные выражения:

*,* отсюда следует, что искомое

*Задача 3.2.* В правильной шестиугольной пирамиде SABCDEF, стороны основания которой равны 1, а боковые рёбра равны 2, найти расстояние между прямыми SB и AF.

*Задача 3.3.* В правильной четырёхугольной пирамиде SABCD, все рёбра которой равны 1, найти расстояние между прямыми SA и CD.

*Задача 3.4.* В правильной шестиугольной призме ABCDEFA1B1C1D1E1F1, все рёбра которой равны 1, найти расстояние между прямыми AA1 и CF1.

*Задача 3.5.* В правильной четырехугольной пирамиде SABCD, все ребра которой равны 1, найти расстояние между прямыми SA и BC.

**Заключение**

Итак, метод объёмов действительно позволяет решать некоторые типы стереометрических задач более рационально. Такие решения более понятны, удобны и занимают меньше времени по сравнению с традиционными. Данный метод рекомендуется для рассмотрения с целью подготовки учащихся к ЕГЭ, для решения задач олимпиадного уровня.