Математика не для ЕГЭ

Е. К. Белый

Геометрия двусторонней линейки

Учебное пособие для учащихся средних школ

Петрозаводск
Издательство ПетрГУ
2022

УДК 514.01
ББК 22.151
Б439

Рецензенты:

С. С. Платонов, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа ПетрГУ;
П. В. Дружинин, доктор экономических наук, ведущий научный сотрудник отдела моделирования и прогнозирования регионального развития института экономики КарНЦ РАН

Белый, Евгений Константинович.
Б439 Геометрия двусторонней линейки : учебное пособие для учащихся средних школ / Е. К. Белый. – Петрозаводск : Издательство ПетрГУ, 2022. – 78, [2] с. – (Математика не для ЕГЭ).
ISBN 978-5-8021-3973-8

Учебное пособие посвящено методам геометрических построений посредством одной двусторонней линейки. Выполнение представленных в книге упражнений способствует формированию у школьников логического мышления.

ISBN 978-5-8021-3973-8

УДК 514.01
ББК 22.151

Содержание

*Прямая лінея на бумагѣ, способомъ лінеїкї їлї
правілца, ї пера. карандаша, їлі какія вещї
остроконечноï, ї прочая, рукою начертается.*

Прїемы цїркуля ї лінеїкї, 1709 лѣта

Предисловие

Дорогой читатель! В этой книге, как следует из ее названия, речь пойдет о построении только прямых линий посредством двусторонней линейки. Вы вправе заметить: «А что здесь нового? Разве у меня на столе лежит не двусторонняя? И вообще, где вы видели одностороннюю линейку?» Однако дело в том, что как геометрические объекты (точки, прямые и т. д.), так и инструменты геометра есть не что иное, как абстракции. Классическая линейка для геометрических построений односторонняя и без шкалы. Более того, категорически запрещается наносить на нее какие-либо метки. О наличии у нашей линейки второй стороны и шкалы мы в процессе построений «забываем». Однако в данной книге нам разрешат использовать обе стороны линейки. Зато отберут циркуль. По сути, нам предстоит освоить новый *инструмент, а потому начнем разговор с обзора возможностей классических инструментов: циркуля и односторонней линейки. В этой связи уместно вспомнить замечательную историю книги «Приемы циркуля и линейки», цитату из которой мы приводим в качестве эпиграфа.*

В 1686 г. австрийский военный инженер барон Антон Эрнст Буркхард фон Пюркенштейн анонимно издал в Вене книгу «Эрц-герцогские приемы циркуля и линейки, или Избранные начала математических наук». Тогда никто и представить не мог, насколько востребованным окажется этот труд в далекой России – вскоре после того, как Указом Петра I (1701) в Москве открылась «Школа математических и навигационных наук» – первое в России учебное заведение, где готовили офицеров артиллерии и флота, а также военных инженеров. От этой школы ведут свое начало все российские военные училища. В ее стенах с 1701 по 1739 год преподавал Леонтий Филиппович Магницкий, известный как автор «Арифметики» (1703) – первого российского учебника математики.

Руководство школой было поручено сподвижнику царя, одному из самых образованных людей России петровских времен, выдающемуся государственному и военному деятелю Якову Брюсу. Перед Брюсом встала задача обеспечения курсантов учебной литературой. Надо заметить, *циркуль и линейка играли тогда в инженерных расчетах ту же роль, что сейчас компьютер. А в программе обучения инженеров, артиллеристов и мореплавателей центральное место занимала геометрия. От морских и артиллерийских офицеров требовалась отличная теоретическая подготовка. Артиллерист должен уметь рассчитать траекторию снаряда, с учетом рельефа местности расставить орудия; моряк посредством циркуля и линейки определить положение корабля на карте. Парусное судно XVIII века – сложнейшее инженерное сооружение, вобравшее в себя все достижения современной науки. И морской офицер должен был уметь не только управлять судном, но и организовать любой ремонт.*

Поскольку у фон Пюркенштейна тщательно разобраны все основные геометрические построения с упором на практическое применение, выбор Брюса пал именно на его книгу. Яков Брюс перевел «Приемы циркуля и линейки» на русский язык, дополнив новыми задачами. Интересно, что редактировал книгу лично государь. Сохранилась рукопись с пометками, сделанными рукой Петра I. В марте 1708 г. книга была напечатана под названием «Геометрия славянского землемерия». Это была первая печатная книга, изданная на только что введенном гражданском алфавите, и первая в России книга, обстоятельно излагавшая *важнейшие геометрические построения. Когда заходит речь о петровских временах, поневоле приходится постоянно употреблять слово «первый». Очень многое в стране делалось тогда впервые. В феврале 1709 г. увидело свет переработанное издание книги фон Пюркенштейна уже под названием «Приемы циркуля и линейки» с добавленной царем Петром I главой «Как делать на горизонтальном месте солнечные часы». На этой книге выросло не одно поколение российских офицеров и инженеров.*

Геометры с античных времен верили в могущество циркуля и линейки, хотя первый инструмент позволяет строить только окружности, а второй только прямые. Многие задачи, которые мы привыкли считать алгебраическими, тогда решались геометрически. Так, греки посредством циркуля и линейки решали квадратные уравнения. И сейчас все построения в рамках школьной программы выполняются классическим набором интструментов. Даже если ради экономии времени мы используем угольник, предполагается, что построение можно выполнить циркулем и линейкой. И все же есть построения, которые геометры не могли осуществить с античных времен. Прежде всего, это трисекция угла: мы можем разделить угол на две, но не можем разделить на три равных части. В XVII в. Рене Декарт создал специальный инструмент, который *может выполнить такое построение. Позже изобрели и другие «трисекторы». Но для геометра это «нечестный прием». Только в 1837 г. Пьер Ванцель решил проблему, доказав невозможность выполнения трисекции и ряда других построений посредством циркуля и линейки. Не все построения можно выполнить классическими средствами! Теперь в центре внимания геометров оказались проблемы исследования возможностей отдельных классических, а также «нестандартных» инструментов.*

Еще в XVII в. появились задачи на построение с одним циркулем, одним угольником и одной линейкой. Последние имели важное значение и практическое применение в геодезии. Поскольку геодезистам в своей работе приходится иметь дело почти исключительно с прямыми линиями, возник интерес к геометрическим построениям, производимым одной линейкой. Такого рода построения рассматривали Иоганн Ламберт, Шарль Брианшон – автор книги «Приложения теории трансверсалей» (1818), предназначенной для лиц, занимающихся землемерными работами, а также Жан-Виктор Понселе в связи с исследованиями по проективной геометрии. Но наиболее полные исследования в этой области были произведены швейцарским геометром Якобом Штейнером и изложены в его сочинении «Геометрические построения, производимые *с помощью прямой линии и неподвижного круга» (1833). Оказалось, что, если на плоскости дана окружность, мы можем посредством линейки (односторонней) построить любое конечное множество точек, которое можно построить посредством циркуля и линейки. Кроме того, Штейнер исследовал построения, производимые одной двусторонней линейкой. Им и посвящена наша книга.*

Мы рассказали, зачем нужны были геометрические построения инженеру. Но зачем они современному школьнику? Действительно, в последнее время задачи на построение незаслуженно отодвинуты на задний план. И это несмотря на их важную роль в формировании у учащихся логического мышления. В возрасте, когда школьники начинают изучать геометрию, этот вид мышления у них находится еще в стадии становления. Многие из нас могут вспомнить, как, начиная изучать признаки равенства треугольников, просто не понимали, что от нас хочет учитель, что такое доказательство. Зато в этом возрасте школьник готов выполнять сложные манипуляции с инструментами. Такие манипуляции сродни игре. И логика быстрее постигается через инструменты. Так изучали геометрию с древних времен. И сегодня – в век компьютера – время, потраченное на геометрические построения, – это время, потраченное с большой пользой.

Геометрические построения излагаются в нашей книге в такой последовательности, чтобы возможность каждого следовала из возможности выполненных ранее или зафиксированных в аксиомах. Ряд построений посредством двусторонней линейки выполняется даже проще и быстрее, чем посредством односторонней линейки и циркуля; другие становятся долгими и нудными. В любом случае мы не ставим под сомнение полезность циркуля. Речь идет только об исследовании возможностей инструмента.

К «теории» прилагается подборка задач. Некоторые задачи «сходу» не решаются. В таких случаях имеет смысл обратиться за помощью к циркулю (для начала).

Желающим более подробно ознакомиться с затронутыми в книге вопросами рекомендуем следующую литературу: [1, с. 124–129], [2, с. 141–145], [3, с. 252–261], [4, с. 82–92], [5], [6], [7], [8], [9, с. 203–204, 219–220], [10], [11, с. 12–15], [12].

Выражаем благодарность всем, кто высказал замечания и предложения по вышедшим в печать книгам данной серии. *По-прежнему вы можете писать нам по любому из адресов:* **belyi@petrsu.ru** *или* **kurs_belyi1@mail.ru**.

Евгений Белый

Апрель 2022

Если пропал циркуль

Построения с двусторонней линейкой

Как быть, если у нас пропал циркуль? Что может односторонняя линейка без циркуля?

Аксиомы односторонней линейки

Односторонняя линейка позволяет:

a) построить отрезок, соединяющий две заданные точки;

b) построить прямую, проходящую через две заданные точки;

c) построить луч, исходящий из заданной точки и проходящий через любую другую заданную точку.

Теперь нам разрешили использовать другую сторону линейки. Такую линейку называют *двусторонней.*

Аксиомы двусторонней линейки

Двусторонняя линейка позволяет выполнить любое из построений, доступных односторонней линейке, и, кроме того:

d) в каждой из полуплоскостей, определяемых заданной прямой, построить прямые, параллельные этой прямой и проходящие от нее на расстоянии h, где h – фиксированная для данной линейки величина – ширина линейки;

e) если даны две точки A и B, линейка позволяет установить, будет ли расстояние между A и B больше ширины линейки h, т. е. выполняется ли условие $\rho(A, B) > h$; если $\rho(A, B) > h$, то можно построить две пары параллельных прямых, проходящих соответственно через точки A и B, таких, что расстояние между ними равно h.

Из аксиомы (d) следует возможность следующего построения.

Построение 1. Пусть дана прямая a_1. Требуется построить конечную последовательность параллельных a_1 прямых a_i, где $i = 2, 3 \ldots n$, таких, что расстояния между любыми двумя соседними a_i равны h:

$$\rho(a_1, a_2) = \rho(a_2, a_3) = \ldots = \rho(a_{n-1}, a_n) = h.$$

На рис. 1а такая последовательность прямых расположена в нижней полуплоскости относительно прямой a_1.

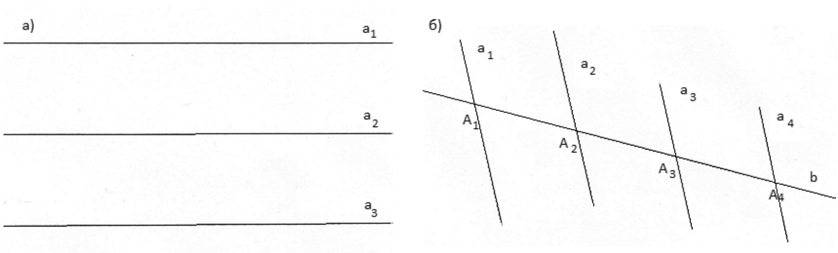

Рис. 1. Последовательность прямых (а); последовательность точек (б)

Решение: строим в нижней относительно a_1 полуплоскости прямую a_2, параллельную a_1 и проходящую от нее на расстоянии h (d). Затем в полуплоскости, определяемой прямой a_2 и не содержащей a_1, строим прямую a_3, параллельную a_2 и проходящую от нее на расстоянии h. Продолжаем так же, пока не построим a_n. $\boxed{\text{П1}}$

В дальнейшем нам пригодится следующее построение.

Построение 2. Даны прямая b и точка A_1 на ней. Требуется построить конечную последовательность точек A_i, где $i = 2, 3 \ldots n$, таких, что расстояния между любыми двумя соседними A_i равны:

$$\rho(A_1, A_2) = \rho(A_2, A_3) = \ldots = \rho(A_{n-1}, A_n),$$

т. е. $|A_1A_2| = |A_2A_3| = \ldots = |A_{n-1}A_n|$. На рис. 1б такая последовательность точек расположена на прямой b по правую сторону от точки A_1.

Решение: через точку A_1 проводим прямую a_1, не совпадающую с b. Затем в правой относительно a_1 полуплоскости строим последовательность параллельных a_1 прямых a_i $(i = 2, 3 \ldots n)$, таких, что расстояние между любыми соседними равно h (п. 1). Точки пересечения прямой b с прямыми a_i обозначим A_i. Последовательность точек A_i удовлетворяет условиям задачи. $\boxed{\text{П2}}$

Расстояние между соседними построенными точками зависит от угла, образуемого прямыми a_1 и b, и принимает значения из интервала $[h; +\infty)$.

Теперь небольшое замечание о применении аксиомы (е). Допустим, линейку удалось расположить между точками A и B, как показано на рис. 2а. Это значит, расстояние

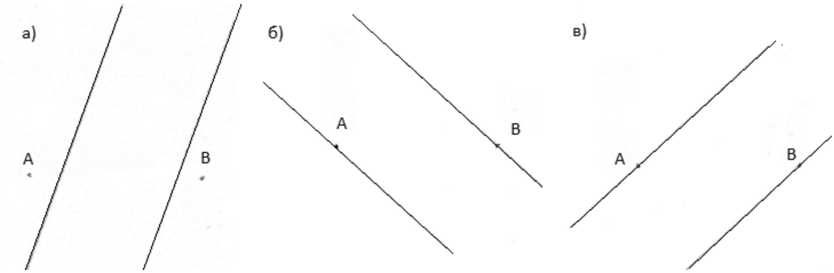

Рис. 2. $\rho(A, B) > h$ (а); левая (б) и правая (в) h-пары

между точками больше ширины линейки: $\rho(A, B) > h$. Вращая линейку вокруг некоторого центра против часовой стрелки, мы можем прийти к положению, когда точки A и B лежат на ее сторонах. Тогда можно провести одну из заявленных в аксиоме (е) пар прямых (см. рис. 2б). Аналогично, вращая линейку по часовой стрелке, придем к положению, изображенному на рис. 2в, и проведем вторую пару прямых. Для краткости в первом случае будем говорить о *левой h-паре*, во втором – о *правой h-паре параллельных прямых,* проходящих через точки A и B.

Построение 3. Дан отрезок AB. Причем $\rho(A,B) > h$. Построить середину отрезка. Построить перпендикуляр, проходящий через середину отрезка AB (рис. 3а).

Решение: поскольку $\rho(A,B) > h$, согласно аксиоме (e)

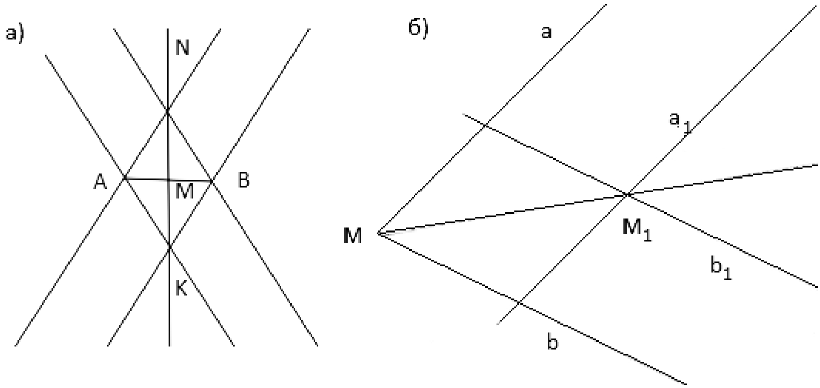

Рис. 3. Середина отрезка AB (а); биссектриса угла aMb (б)

мы можем построить проходящие через A и B левую и правую h-пары прямых. Точки A, B, N и K их пересечения – вершины ромба $ANBK$. Диагонали ромба NK и AB перпендикулярны и в точке их пересечения M делятся пополам. Точка M – середина отрезка AB. $\boxed{\text{П3}}$

Построение 4. Дан угол aMb. Требуется построить его биссектрису (см. рис. 3б).

Решение: проведем прямую a_1, параллельную a и проходящую на расстоянии h от нее в той полуплоскости, в которой лежит угол aMb. Проведем прямую b_1, параллельную b и проходящую на расстоянии h от нее в той полуплоскости, в которой лежит угол aMb. Обозначим M_1 точку пересечения a_1 и b_1. Поскольку эта точка одинаково удалена от сторон угла, она лежит на биссектрисе. Следовательно, MM_1 – биссектриса угла aMb. $\boxed{\text{П4}}$

Построение 5. Дан угол aMb. Отложить от луча b угол, равный aMb и расположенный в полуплоскости, не содержащей угла aMb. Эту же задачу можно сформулировать и так: провести из точки M луч, симметричный лучу a относительно прямой b (рис. 4а).

Решение: проведем прямую a_1, параллельную a

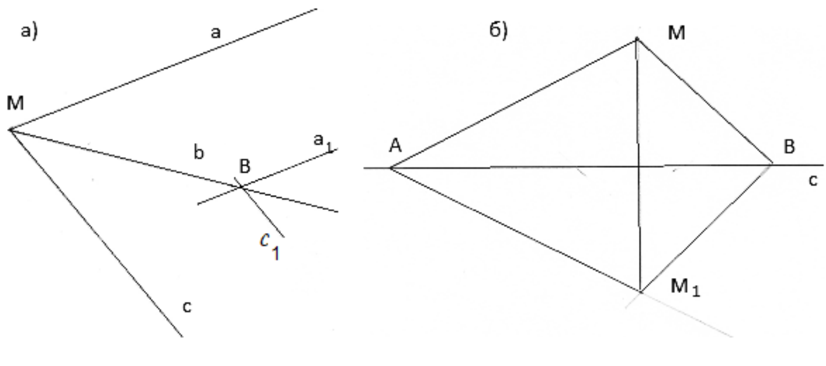

Рис. 4. Удвоение угла (а); построение точки, симметричной данной (б)

и проходящую на расстоянии h от нее в полуплоскости угла aMb. Прямая a_1 пересекает b в точке B. Прямые a и a_1 образуют правую h-пару относительно точек M и B. Построим левую h-пару прямых c и c_1. Прямая c проходит через точку M. Угол cMb равен углу aMb. Луч c симметричен лучу a относительно прямой b. $\boxed{\text{П5}}$

Построение 6. Дана прямая c и не лежащая на ней точка M. Построить прямую, перпендикулярную c и проходящую через точку M. Построить точку M_1, симметричную M относительно прямой c (см. рис. 4б).

Решение: проведем из точки M две прямые, непараллельные c. Пусть A и B – точки их пересечения с прямой c. Проведем из точки A луч, симметричный лучу AM (п. 5), а из точки B луч, симметричный BM. Точка пересечения этих лучей M_1 будет симметрична M, а прямая MM_1 перпендикулярна прямой c. $\boxed{\text{П6}}$

Поскольку ломаная линия и, в частности, многоугольник однозначно определяются последовательностью вершин, располагая только линейкой, мы всегда можем построить ломаную, симметричную данной относительно любой оси.

Построение 7. Дана прямая c и точка M на ней. Требуется провести через точку M прямую, перпендикулярную прямой c (рис. 5).

Решение: проведем через точку M прямую m, не совпадающую с прямой c. Построим по разные стороны от m две параллельные ей прямые a и b, проходящие на расстоянии h от m. Пусть A и B – точки пересечения прямых a и b соответственно с прямой m. Тогда $AM = BM$.

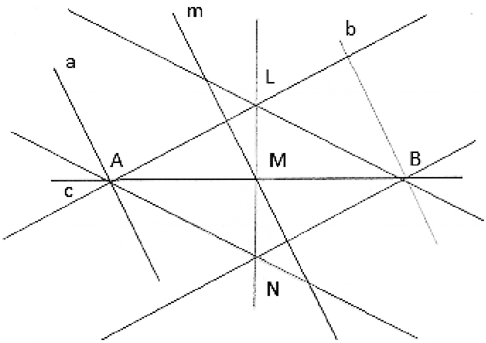

Рис. 5. $LM \perp AB$

Проведем левую и правую h-пары прямых для точек A и B. Пусть L и N – точки их пересечения, отличные от A и B. Тогда $LN \perp c$ и $M \in LN$. $\boxed{\text{П7}}$

Построение 8. Дана прямая a и точка A вне ее. Провести через точку A прямую, параллельную a.

Решение: I способ. Проведем через точку A прямую c, перпендикулярную a (п. 6), а затем через ту же точку A прямую b, перпендикулярную c (п. 7):

$(c \perp a)$ & $(b \perp c) \to (b \parallel a)$. $\boxed{\text{П8}}$

II способ. Построим последовательность пяти равноудаленных параллельных прямых m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 следующим образом: через точку A проведем к прямой a секущую m_2, проведем на расстоянии h слева от нее прямую m_1, затем справа от m_2 построим последовательность па-

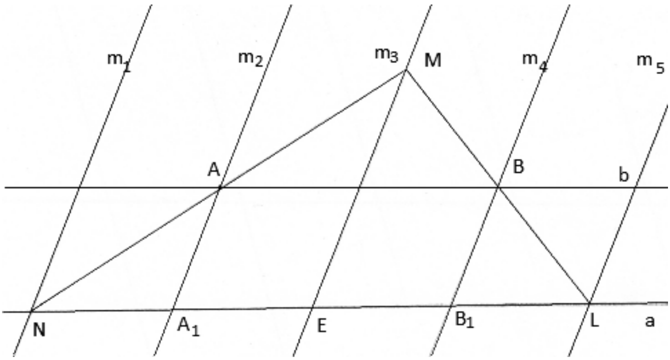

Рис. 6. Прямая, параллельная a

раллельных прямых m_3, m_4, m_5, так, чтобы расстояние между двумя соседними равнялось h (см. рис. 6). Точки пересечения прямых m_i (где $i = 1, \ldots, 5$) с прямой a обозначим соответственно N, A_1, E, B_1 и L. Очевидно, что $NA_1 = A_1E = EB_1 = B_1L$. Проведем прямую через точки N и A. Точку пересечения прямых NA и m_3 обозначим M. Проведем прямую через точки M и L. Точку пересечения прямых ML и m_4 обозначим B. Тогда прямая AB будет параллельна a. Действительно, рассмотрим $\triangle NME$. Прямая AA_1 его средняя линия, так как проходит через середину стороны NE и параллельна основанию ME. Значит, A – середина стороны NM. Рассмотрим $\triangle LME$. Прямая BB_1 его средняя линия, так как проходит через середину стороны EL и параллельна основанию ME. Значит,

B – середина стороны ML. Теперь осталось рассмотреть $\triangle NML$. Прямая AB проходит через середины сторон NM и LM, а значит, является средней линией и параллельна основанию NL. $\boxed{\text{П8}}$

III способ. Проведем через точку A секущую к прямой a. Точку ее пересечения с a обозначим B (рис. 7). Проведем справа от прямой AB на расстоянии h

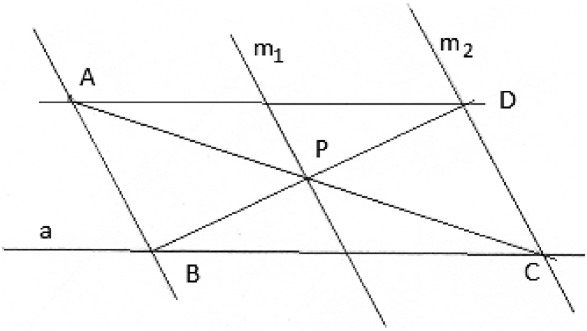

Рис. 7. Прямая, параллельная a

параллельную ей прямую m_1, а справа от m_1 на том же расстоянии – параллельную прямую m_2. Пусть C – точка пересечения прямых a и m_2. Проведем прямую через точки A и C. Пусть P – точка пересечения прямых AC и m_1. Проведем прямую через точки B и P. Пусть D – точка пересечения BP и m_2. Тогда прямая AD параллельна a. $\boxed{\text{П8}}$

Обратим внимание на тот факт, что хотя описание построений способом I короче, чем II и III, однако на практике II и III выполняются проще и быстрей, чем I.

Построение 9. Разделить отрезок AB на 5 равных частей (рис. 8).

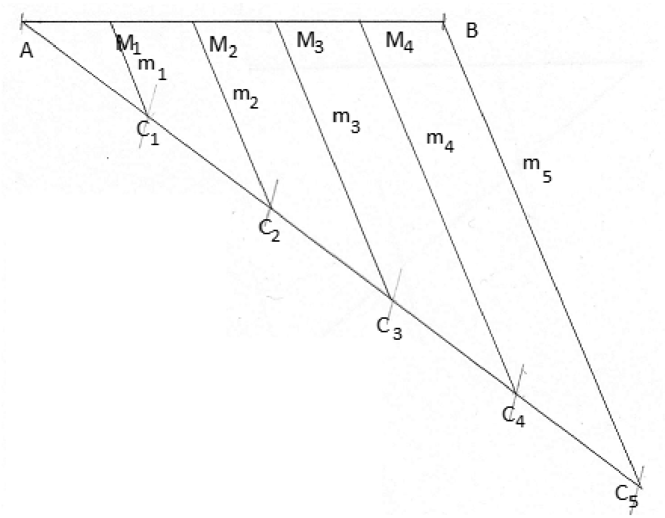

Рис. 8. Деление отрезка на 5 равных частей (I способ)

Решение: I способ. Проведем из точки A луч под произвольным углом к отрезку AB и отложим на нем от точки A последовательность точек C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, так, чтобы выполнялось условие $|AC_1|= |C_1C_2|= \ldots = |C_4C_5|$ (п. 2). Проведем прямую через точки C_5 и B. Через точки C_1, C_2, C_3, C_4 проведем прямые, параллельные BC_5. Точки их пересечения с прямой AB обозначим M_1, M_2, M_3, M_4.

Из теоремы Фалеса следует равенство отрезков AM_1, M_1M_2, M_2M_3, M_3M_4, M_4M_5. $\boxed{\text{П9}}$

Это тот самый способ деления отрезка на равные части, который мы изучаем в школе. Но, если нам запрещено пользоваться циркулем, он оказывается слишком громоздким. Поэтому рассмотрим еще один, в данном случае более эффективный, способ.

II способ. Проведем ниже прямой AB прямую m, параллельную AB (рис. 9). Например, согласно постулату (d)

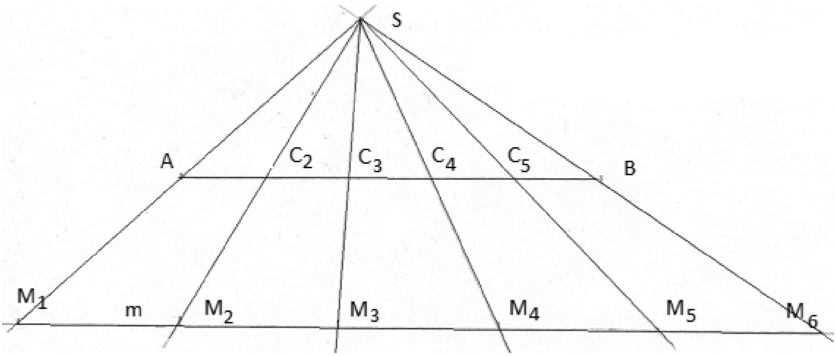

Рис. 9. Деление отрезка на 5 равных частей (II способ)

можно построить прямую m, проходящую на расстоянии h от AB. На прямой m возьмем произвольную точку M_1 и от нее последовательно отложим точки M_2, M_3, M_4, M_5, так, чтобы выполнялось условие

$$\rho(M_1, M_2) = \rho(M_2, M_3) = \ldots = \rho(M_5, M_6).$$

Для определенности положим $|AB| < |M_1M_6|$. Выполнения этого условия всегда можно добиться, взяв достаточно большое расстояние между точками M_1 и M_2. Проведем одну прямую через точки M_1 и A, а другую через точки M_6 и B. Точку пересечения прямых M_1A и M_6B обозначим S. Проведем прямые M_2S, M_3S, M_4S, M_5S. Эти прямые пересекутся с AB в точках C_2, C_3, C_4, C_5 соответственно. Они разделят отрезок AB на 5 равных частей. $\boxed{\text{П9}}$

Разумеется, аналогичным способом можно разделить отрезок на любое число равных частей, в том числе на две. Причем соблюдение условия, чтобы длина отрезка была больше h (п. 3), здесь не требуется.

Теперь построим график параболы. Кто-то скажет, что это невозможно. И будет прав в том смысле, что мы не можем провести непрерывную линию параболы. Однако мы можем построить сколь угодно большое количество ее точек. На уроках в школе графики всех кривых, кроме прямой и окружности, строят именно по точкам. Прежде чем приступить к построению, заметим, что параболу можно считать однозначно определенной, если задана ее ось симметрии, вершина и одна произвольная точка.

Построение 10. Пусть луч OY – ось симметрии некоторой параболы, а O – ее вершина, кроме того, дана произвольная точка правой ветви параболы M_0. Требуется построить еще 9 точек правой ветви (рис. 10а).

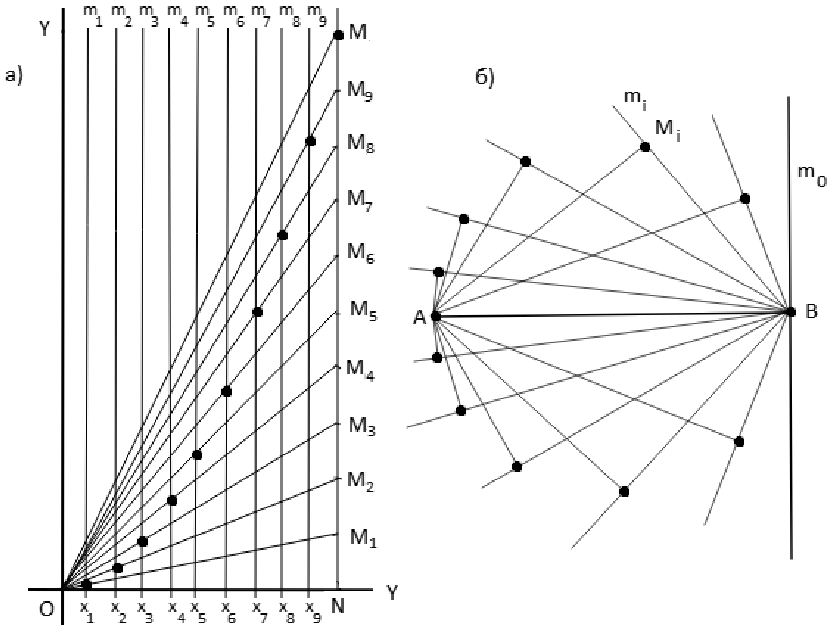

Рис. 10. Построение параболы (а) и окружности (б)

Решение: проведем луч OX перпендикулярно OY. Из точки M опустим перпендикуляр на OX. Пусть точка N – основание перпендикуляра. Разобьем отрезок MN на 10 равных интервалов (п. 9). Узлы разбиения, двигаясь в направлении от N к M, последовательно обозначим M_1, M_2, …, M_9. Отрезок ON также разобьем на 10 равных интервалов. Абсциссы узлов разбиения, двигаясь в направлении от O к N, обозначим x_1, x_2, ..., x_9. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, 9$ построим прямую m_i, проходящую через узел разбиения x_i и параллельную оси симметрии параболы OY. Проведем от точки O к каждой точке M_i луч. Отметим, как показано на рис. 10а, для каждого значения i точку пересечения луча OM_i с прямой m_i. Мы утверждаем, что отмеченные точки пренадлежат нашей параболе. Действительно, их координаты будут иметь вид (x_i, y_i). Если координаты точки M записать в виде (x_0, y_0), то $x_i = \frac{i}{10}x_0$, $M_i\left(x_0, \frac{i}{10}y_0\right)$, а y_i можно найти из пропорции

$$\frac{y_i}{\frac{i}{10}y_0} = \frac{\frac{i}{10}x_0}{x_0} \quad \Rightarrow \quad y_i = \left(\frac{i}{10}\right)^2 y_0.$$

Пусть $y_0 = ax_0^2$, тогда $y_i = a\left(\frac{i}{10}\right)^2 x_0^2 = a\left(\frac{i}{10}x_0\right)^2$, то есть $y_i = ax_i^2$. $\boxed{\text{П10}}$

Для определенности мы разобрали случай, когда требовалось построить 9 точек параболы. Количество точек можно увеличить, например, проведя посредине между парой прямых m_i, m_{i+1} еще одну прямую, параллельную оси симметрии параболы и отметив точку ее пересечения с лучом, проведенным из точки O к середине отрезка M_i,M_{i+1}. Можно изначально разбить отрезки ON и NM не на десять, а на большее число интервалов или продолжить построение графика влево и вверх от точки M.

Еще проще строится любое количество точек окружности.

Построение 11. Дан диаметр окружности AB. Требуется построить заданное количество точек окружности (см. рис. 10б).

Решение: через точку B проведем прямую m_0, перпендикулярную AB. Теперь в левой полуплоскости относительно прямой m_0 из точки B будем проводить лучи. На каждый луч из точки A опустим перпендикуляр. Тогда основания всех перпендикуляров будут точками окружности с диаметром AB, поскольку вершины прямых углов, опирающихся на диаметр, лежат на окружности. $\boxed{\text{П11}}$

Построение 12. Дан отрезок AB. Требуется на прямой c, параллельной AB, вправо от точки A_1 отложить отрезок, равный AB (рис. 11а).

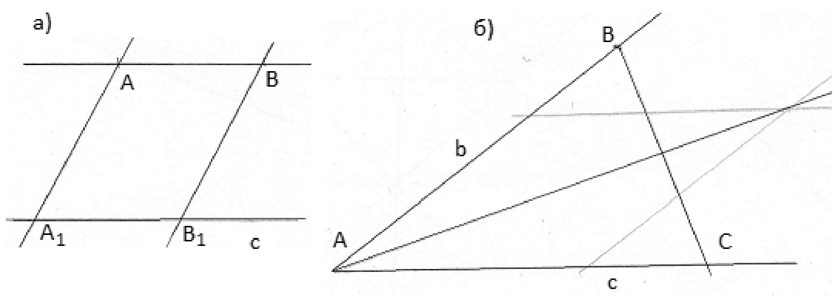

Рис. 11. Параллельный перенос (а) и поворот (б) отрезка AB

Решение: проведем прямую через точки A и A_1. Через точку B проведем прямую, параллельную AA_1. Точку ее пересечения с прямой c обозначим B_1. Поскольку четырехугольник ABB_1A_1 – параллелограмм, а противоположные стороны параллелограмма равны, $|AB|= |A_1B_1|$. $\boxed{\text{П12}}$

Построение 13. Дан угол bAc. На стороне b от его вершины отложен отрезок AB. Отложить на стороне c от вершины того же угла отрезок, равный AB (см. рис. 11б).

Решение: построим биссектрису угла bAc (п. 4). Через точку B проведем прямую, перпендикулярную биссектрисе. Точку пересечения этой прямой с лучом c обозначим C. Тогда $|AB|= |AC|$. $\boxed{\text{П13}}$

Поскольку любое движение отрезка на плоскости сводится к параллельному переносу и повороту относительно некоторого центра, результаты (п. 12–13) означают возможность отложить заданный отрезок от произвольной точки на произвольной прямой. Отсюда также следует возможность нахождения сумм и разностей отрезков. В частности, теперь мы можем построить отрезок, равный периметру заданного многоугольника.

Построение 14. Дан угол aOb. Требуется построить равный ему угол с вершиной в точке O_1 и сторонами, параллельными сторонам aOb (рис. 12а).

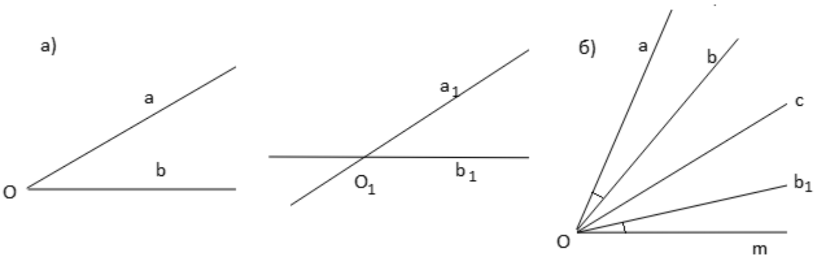

Рис. 12. Движения угла AB

Решение: проведем через точку O_1 прямые a_1 и b_1, параллельные a и b соответственно. $\angle aOb = \angle a_1Ob_1$. $\boxed{\text{П14}}$

Построение 15. Дан угол aOb и луч m, исходящий из точки O. Требуется отложить от луча m против часовой стрелки угол, равный aOb (см. рис. 12б).

Решение: строим биссектрису c угла aOm, а затем луч b_1, симметричный b относительно биссектрисы. Тогда $\angle mOb_1 = \angle aOb$. $\boxed{\text{П15}}$

На рисунке 12б луч b лежит внутри угла aOc. Нетрудно повторить аналогичные построения для случаев, когда луч b проходит внутри угла cOm или когда угол надо отложить от луча m в направлении против часовой стрелки.

Поскольку любое движение угла на плоскости можно свести к параллельному переносу (п. 14) и повороту относительно некоторого центра (п. 15), от любого луча в любом направлении можно отложить угол, равный заданному. Отсюда также следует возможность нахождения сумм и разностей любых углов. Сумма и разность углов определены в рамках школьной программы.

Результаты (п. 12–15) позволяют нам построить треугольник по двум сторонам и углу между ними, а также по стороне и двум прилежащим к ней углам.

Построение 16. Даны отрезки c и d, а также угол α. Построить треугольник, две стороны которого равны c и d, а угол между ними – α (рис. 13).

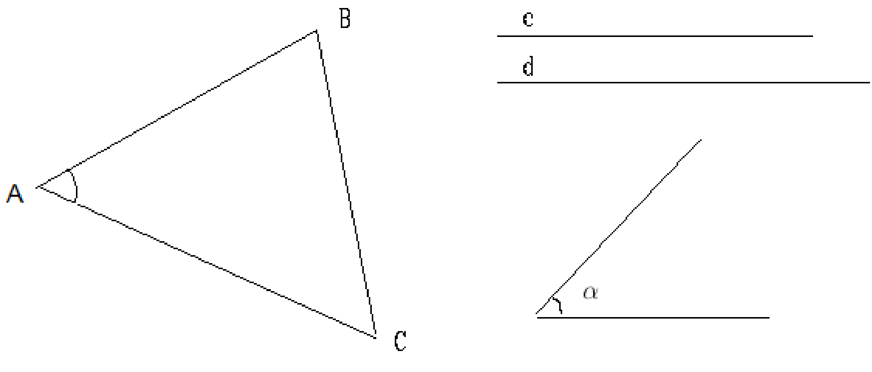

Рис. 13. Построение треугольника по двум сторонам и углу между ними

Решение: поскольку не задано никаких ограничений относительно положения треугольника на плоскости, берем произвольную точку A и проводим из нее луч. На луче откладываем отрезок AB, равный c (п. 12–13). Проводим из точки A луч под углом α к AB (п. 14–15) и откладываем на нем отрезок AC, равный d. Соединяем точки B и C отрезком прямой. $\boxed{\text{П16}}$

Построение 17. Дан отрезок c и два угла α и β. Построить треугольник, одна из сторон которого равна c, а два прилежащих к ней угла равны α и β (рис. 14).

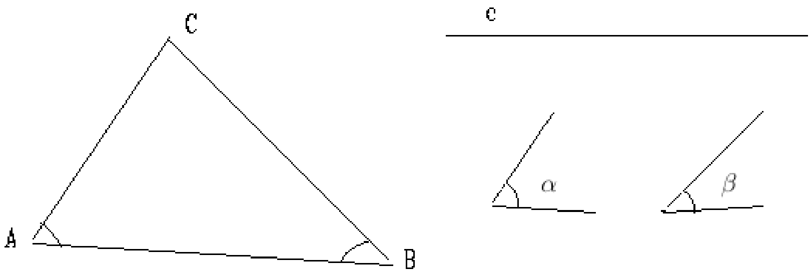

Рис. 14. Построение треугольника по стороне и двум прилежащим к ней углам

Решение: поскольку не задано никаких ограничений относительно положения треугольника на плоскости, берем произвольную точку A и проводим из нее луч. На луче отложим отрезок AB, равный c (п. 12–13). От точки A проведем луч под углом α. От точки B проведем

луч под углом β. Пусть C – точка пересечения лучей. Треугольник ABC удовлетворяет условиям задачи. $\boxed{\text{П17}}$
А можем ли мы построить треугольник по трем сторонам? Пока нет. Для этого надо уметь находить точки пересечения двух окружностей. Следовательно, нам придется предварительно освоить еще ряд построений. В курсе планиметрии мы научились строить с циркулем и линейкой прямоугольный треугольник по гипотенузе и одному катету. Теперь попробуем выполнить это построение посредством двусторонней линейки. Но для начала немного упростим задачу.

Построение 18. Дан отрезок AB. Требуется построить прямоугольный треугольник с гипотенузой AB и катетом, равным ширине линейки h (рис. 15).

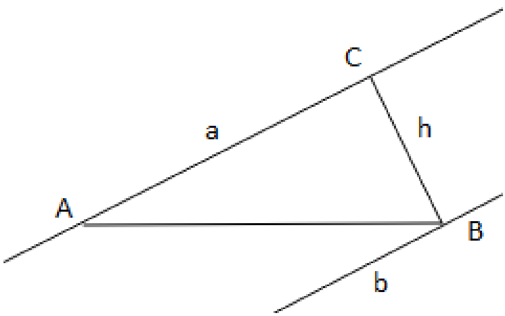

Рис. 15. Построение прямоугольного треугольника по гипотенузе и катету, равному h

Решение: через точки A и B проведем правую h-пару параллельных прямых. Пусть прямая a проходит через точку A, а прямая b – через точку B. Из точки B опустим на прямую a перпендикуляр. Пусть C – основание перпендикуляра. $|BC|= h$, так как расстояние между прямыми a и b равно h. ABC – прямоугольный треугольник с гипотенузой AB и катетом BC, равным h. $\boxed{\text{П18}}$

Построение 19. Даны отрезки AB и EF. Требуется построить прямоугольный треугольник с гипотенузой AB и катетом, равным EF (рис. 16).

Решение: через точку B проведем луч n под прямым углом к AB в нижней полуплоскости относительно прямой AB и отложим на нем от точки B отрезок BN, равный EF. В той же полуплоскости проведем прямую, параллельную AB и проходящую на расстоянии h от AB. Пусть N_1 – точка пересечения этой прямой с лучом BN. Проведем прямую через точки A и N. Через точку N_1 проведем прямую, параллельную AN. Пусть A_1 – точка ее пересечения с прямой AB. Поскольку $\frac{A_1B}{AB} = \frac{N_1B}{NB}$, задача сводится к построению подобного искомому треугольника A_1BC_1, катет BN_1 которого равен h (п. 15). На этот раз мы провели через точки A_1 и B левую h-пару прямых a и b. Осталось через точку A провести прямую, параллельную A_1C_1. Пусть C – точка ее пересечения с прямой b. Таким

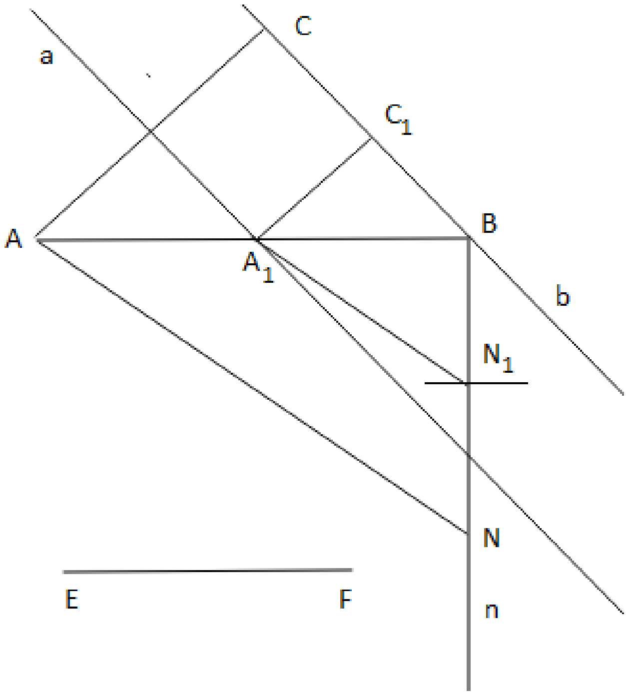

Рис. 16. Построение прямоугольного треугольника по гипотенузе и катету

образом, мы построили треугольник ABC, угол C которого прямой, AB – гипотенуза и катет AC равен EF. $\boxed{\text{П19}}$
В нашем примере $EF > h$, однако приведенные рассуждения можно повторить и для случая, когда катет меньше ширины линейки.

Построение 20. Дана окружность радиуса r с центром в точке O. Построить отрезок касательной к окружности от точки вне окружности A до точки касания (рис. 17).

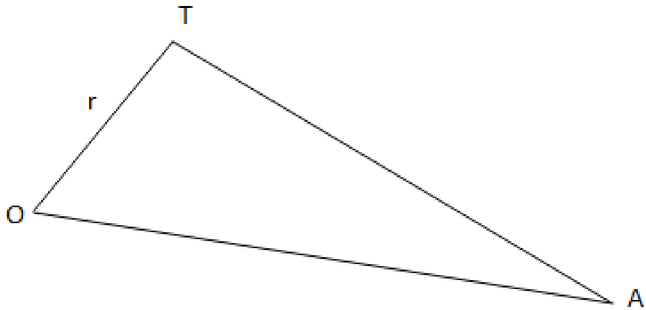

Рис. 17. Касательная к окружности

Решение: построим прямоугольный треугольник, гипотенузой которого является отрезок OA, соединяющий центр окружности O с точкой A, а один из катетов равен r (п. 19). Пусть T – вершина прямого угла. Поскольку точка T удалена от центра окружности на расстояние r и $AT \perp OT$, AT – искомый отрезок касательной. $\boxed{\text{П20}}$

Для определенности мы взяли отрезок касательной, расположенный выше прямой OA. Точно так же можно построить отрезок, лежащий ниже OA. Окружность с центром в точке O мы не могли изобразить на чертеже по причине отсутствия циркуля.

Построение 21. Дана окружность с центром в точке M радиуса $r = |AB|$ и прямая g. Найти точки пересечения прямой и окружности, если таковые имеются (рис. 18).

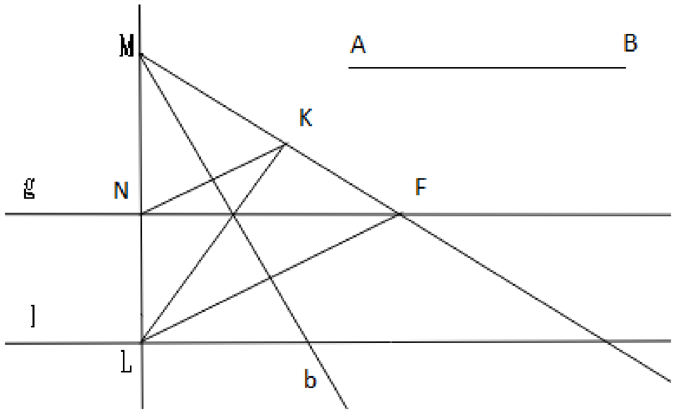

Рис. 18. Построение точек пересечения прямой и окружности

Решение: I способ. Проведем через точку M перпендикуляр к прямой g (п. 6). Пусть N – точка его пересечения с прямой g. На луче ON от точки M отложим отрезок ML, равный AB. Если $|ML| < |MN|$, прямая и окружность не пересекаются. Если $|ML| = |MN|$, точки N и L совпадают с точкой касания прямой g и окружности. Остается рассмотреть случай $|ML| > |MN|$. На отрезке ML, равном радиусу окружности, построим, как на гипотенузе, прямоугольный треугольник MKL, один из катетов которого $MK = MN$ (п. 17). Построим биссектрису b угла

NMK. Зеркально отразим треугольник MKL относительно биссектрисы b. Катет MK отобразится в отрезок ON, а гипотенуза ML – в отрезок MF. Мы получили прямоугольный треугольник MNF с гипотенузой MF, равной радиусу окружности. F – точка пересечения прямой g и окружности. Другую точку пересечения можно найти как точку, симметричную F относительно оси ON. $\boxed{\text{П21}}$
По сути, мы сейчас доказали возможность построения точек пересечения прямой и окружности, отталкиваясь от построений, которые мы уже умеем выполнять. Но если бы мы нанесли на чертеж все промежуточные построения, такой способ показался бы слишком громоздким. Поэтому приведем также построение, принадлежащее Штейнеру. Его можно найти в книге А. Адлера [1, с. 126–127].

II способ. Проведем через точку M прямую, параллельную g, и отложим на ней от точки M отрезок MA, равный радиусу окружности. Проведем прямую g', параллельную MA и проходящую на расстоянии h от нее в той же полуплоскости, в которой расположена прямая g (аксиома d) (рис. 19). Возьмем на прямой g произвольную точку B и проведем прямую MB. Прямая MB пересечет прямую g' в точке B'. Проведем прямую, проходящую через точки A и B. Через точку B' проведем прямую, параллельную AB. Пусть A' – точка ее пересечения с MA.

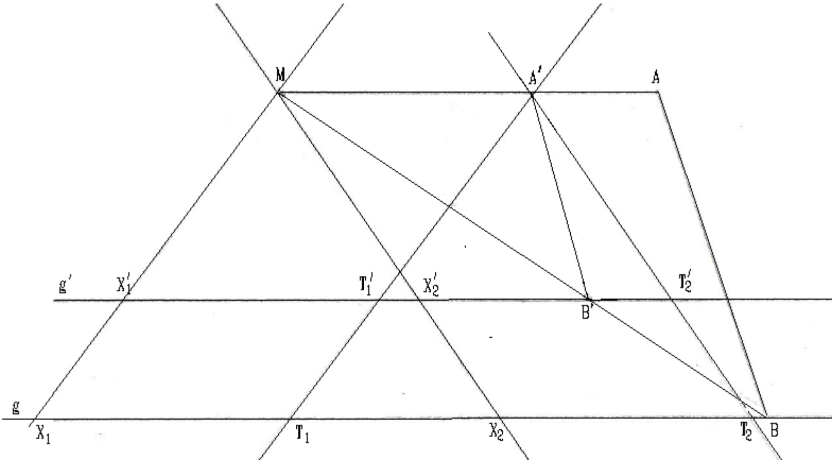

Рис. 19. Построение точек пересечения прямой и окружности

Треугольник $B'MA'$ подобен треугольнику BMA. Отсюда $MA : MA' = MB : MB'$. Нетрудно заметить, что отношение $MB : MB'$ не зависит от выбора точки B и равно отношению расстояния от точки M до прямой g к ширине линейки, то есть к расстоянию от M до прямой g'. Проведем через точки M и A' левую и правую h-пары параллельных прямых. Прямая правой пары, проходящая через точку M, пересекает прямые g и g' соответственно в точках X_1 и X_1'; прямая той же пары, проходящая через точку A', – в точках T_1 и T_1'. Аналогично прямая левой h-пары, проходящая через точку M, пересекает прямые g и g' в точках X_2 и X_2'; а прямая, проходящая через точку A', – в точках T_2 и T_2'. $MA'X_1'T_1'$ и $MA'X_2'T_2'$ – ромбы, так как равны их высоты, опущенные на смежные стороны. $MX_1' = MX_2' = MA'$.

Но $MX_1 : MX_1' = MX_2 : MX_2' = MA : MA' \Rightarrow$ $\Rightarrow MX_1 = MX_2 = MA$. Таким образом, X_1 и X_2 – точки пересечения окружности радиуса MA с центром в точке M и прямой g. $\boxed{\text{П21}}$

Мы рассмотрели случай, когда расстояние от точки M до прямой g больше ширины линейки. Если расстояние от M до g будет меньше ширины линейки, построение аналогично, а если расстояния равны – значительно проще.

Теперь мы умеем строить точки пересечения прямой и окружности. Осталось научиться строить точки пересечения двух окружностей. Для этого нам потребуется *радиальная ось* – прямая, на которой лежат все такие точки M, что отрезки касательных, проведенных от M до точек касания к обеим окружностям, равны: $MT_1 = MT_2$ (рис. 20). Отсюда следует, что середина общей касательной к двум окружностям лежит на радиальной оси. Радиальная ось перпендикулярна прямой O_1O_2, проходящей через центры окружностей. Если окружности пересекаются, то их радиальная ось проходит через точки пересечения A и B. Ради наглядности изображения окружностей на рис. 20 мы «нашли» циркуль, но теперь снова его спрячем.

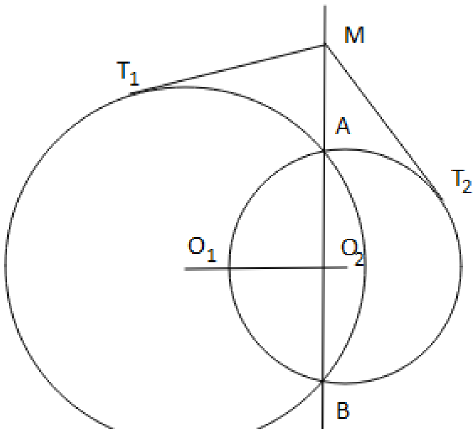

Рис. 20. Радиальная ось двух окружностей

Построение 22. Даны две окружности: одна с центром в точке O_1 радиуса $r_1 = |E_1F_1|$, другая – с центром в точке O_2 радиуса $r_2 = |E_2F_2|$. Построить их радиальную ось (рис. 21).

Решение: построим общую касательную данных окружностей. Если $r_1 = r_2$, то для построения общей касательной достаточно из точек O_1 и O_2 провести под прямым углом к O_1O_2 два луча и отложить на них отрезки O_1T_1 и O_2T_2, равные радиусу окружностей. Тогда отрезок T_1T_2 будет общей касательной. Теперь положим, что радиусы не равны. Пусть для определенности $r_1 > r_2$. Сначала построим отрезок касательной, проведенной из точки O_2 к окружности с центром в точке O_1 радиуса $r1 - r2$ (п. 18).

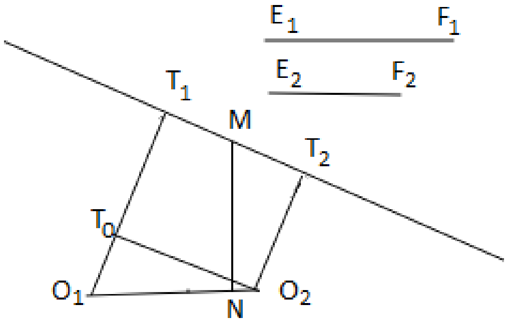

Рис. 21. Построение радиальной линии

Это отрезок O_2T_0. Здесь $|O_1T_0|$ равен $r_1 - r_2$. На луче O_1T_0 отложим отрезок O_1T_1, равный r_1. Через точку T_1 проведем прямую, параллельную O_2T_0. Из точки Q_2 проведем к этой прямой перпендикуляр. Таким образом, четырехугольник $T_0T_1T_2O_2$ – прямоугольник и $|O_2T_2|= |T_0T_1|= r_2$. Значит, T_1T_2 – общая касательная. Построим середину отрезка T_1T_2 – точку M. Осталось провести радиальную ось как прямую, проходящую через точку M и перпендикулярную O_1O_2. $\boxed{\text{П22}}$

Теперь можно приступить к построению точек пересечения двух окружностей. Если расстояние между центрами окружностей O_1O_2 больше суммы их радиусов, то точек пересечения нет. Если $|O_1O_2|= r_1 + r_2$, окружности касаются в одной точке. Если $O_1O_2 < r_1 + r_2$, то имеются две точки пересечения. Для построения точек пересечения надо построить радиальную ось данных окружностей (п. 22). После этого задача сводится к построению точек пересечения радиальной оси с одной из окружностей (п. 21). Теперь мы имеем основание утверждать, что двусторонняя линейка позволяет построить любое множество точек, которое можно построить посредством односторонней линейки и циркуля. Последнее означает, что мы могли бы вовсе отказаться от циркуля. Однако очень не хотелось бы лишать себя удовольствия визуально наблюдать окружности и их дуги как некие непрерывные объекты. К тому же многие построения без циркуля становятся слишком громоздкими.

Задачи

Предлагаемые построения требуется выполнить посредством одной двусторонней линейки. Однако будет интересно и познавательно сначала решить каждую задачу, применяя традиционные инструменты.

Задача 1. Дан треугольник ABC. Требуется на продолжении стороны AB построить отрезок, равный периметру треугольника ABC (рис. 22).

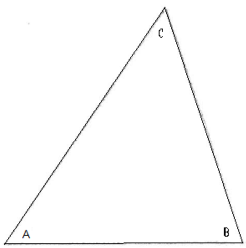

Рис. 22. Чертеж к задачам 1–5

Задача 2. Дан треугольник ABC. Построить центр описанной окружности (см. рис. 22).

Задача 3. Дан треугольник ABC. Построить центр вписанной окружности (см. рис. 22).

Задача 4. Дан треугольник ABC. Построить точку пересечения его медиан (см. рис. 22).

Задача 5. Дан треугольник ABC. Построить точку пересечения его высот (см. рис. 22).

Задача 6. Пусть прямая k – линия берега (рис. 23).

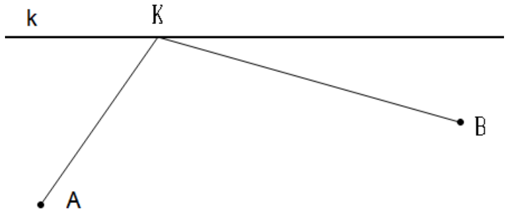

Рис. 23. Чертеж к задаче 6

Туристический отряд должен выйти из пункта A, в пункте K на берегу сделать привал, а затем прибыть в пункт B. Где надо расположить пункт K, чтобы сумма расстояний $|AK|$ и $|KB|$ была минимальной? То есть требуется проложить кратчайший маршрут. Предполагается, что участки AK и KB – отрезки прямых.

Задача 7. В поселке A живет почтальон (рис. 24). Почтовые машины, проезжающие по дорогам b и c, оставляют корреспонденцию для жителей поселка в двух специальных контейнерах B и C, каждый из которых установлен на обочине соответствующей дороги. По утрам почтальон обходит контейнеры и возвращается с корреспонденцией в поселок. Таким образом, он каждое утро проходит маршрут по периметру треугольника ABC. Как следует расположить контейнеры B и C, чтобы маршрут был кратчайшим? Иными словами, требуется минимизировать

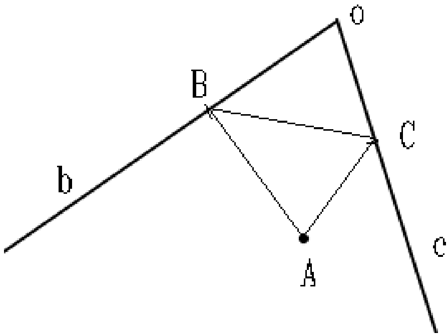

Рис. 24. Чертеж к задаче 7

периметр треугольника ABC.

Задача 8. Муравей вошел в коробку через отверстие A в передней стенке (рис. 25). Дойдя до точки B на левой

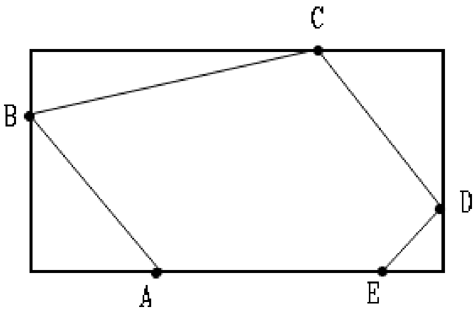

Рис. 25. Чертеж к задаче 8

боковой стенке, он направился в точку C на задней стенке, из точки C пошел в точку D на правой боковой стенке, а затем вышел из коробки через отверстие E в передней стенке. Все переходы от стенки к стенке муравей совершал по отрезкам прямых. Таким образом, он прошел маршрут $ABCDE$. Как надо расставить точки B, C и D на соответствующих стенках, чтобы маршрут оказался самым коротким из всех возможных?

Задача 9. Угол образован лучами b и c, выходящими из точки A (рис. 26). $EF \parallel BC$. Построить отрезок NM,

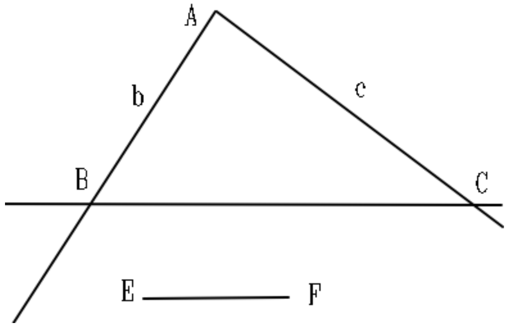

Рис. 26. Чертеж к задаче 9

такой, что $N \in AB$, $M \in AC$, $NM = EF$ и $NM \parallel BC$.

Задача 10. Построить такой треугольник, что его углы при основании равны A_0 и B_0, а периметр равен длине отрезка E_0F_0 (рис. 27).

Задача 11. Даны три не лежащие на одной прямой точки A, B и C. Провести через них три параллельные прямые a, b и c соответственно так, чтобы b проходила между a и c на равном расстоянии от обеих прямых.

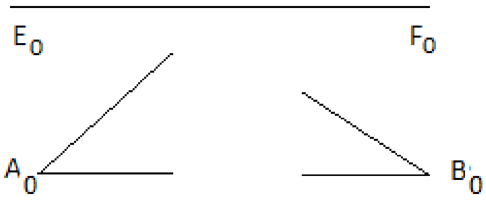

Рис. 27. Чертеж к задаче 10

Задача 12. Дана прямая d и две точки A и B, расположенные в одной полуплоскости относительно нее. Найти такую точку C на прямой AB, что расстояние от C до d вдвое меньше суммы расстояний от A и B до d.

Задача 13. Даны три не лежащие на одной прямой точки L, N и M. Построить параллелограмм, серединами трех сторон которого являются эти точки.

Задача 14. Дан угол aOc и точка M внутри угла (рис. 28). Провести через точку M прямую, отсекающую на сторонах угла равные отрезки.

Задача 15. Дан угол nOm и точка M внутри угла (рис. 29). Провести через точку M секущую так, чтобы отношение отрезков AM и MB равнялось отношению данных отрезков a и b. Здесь A и B – точки пересечения секущей со сторонами угла.

Задача 16. Даны основания высот, опущенных из вершин A, B и C остроугольного треугольника. Обозначим

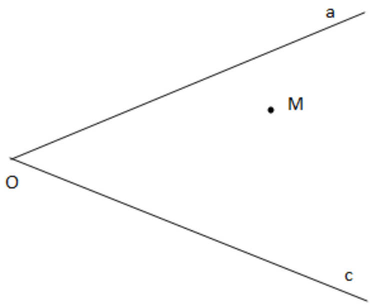

Рис. 28. Чертеж к задаче 14

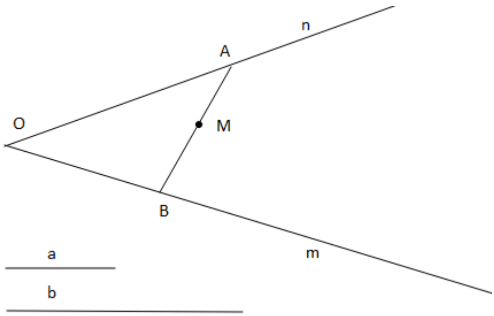

Рис. 29. Чертеж к задаче 15

их соответственно A_1, B_1 и C_1. Требуется построить треугольник ABC.

Пусть дан треугольник ABC. Тогда треугольник $A_1B_1C_1$, вершинами которого являются основания высот, опущенных из соответствующих вершин A, B и C, называют его ортотреугольником (рис. 30). Таким образом, мы должны

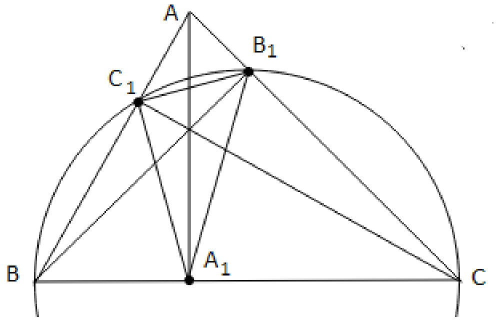

Рис. 30. Чертеж к задаче 16

по известным вершинам ортотреугольника $A_1B_1C_1$ восстановить вершины треугольника ABC. Для этого нам потребуется следующее свойство ортотреугольника: высоты $\triangle ABC$ являются биссектрисами $\triangle A_1B_1C_1$. Докажем последнее утверждение. Поскольку прямые углы BC_1C и BB_1C опираются на отрезок BC, точки B_1 и C_1 лежат на окружности, построенной на отрезке BC, как на диаметре. Для секущих AB и AC, проведенных из точки A, имеет место равенство

$$|AC_1|\dot{|}AB| = |AB_1|\dot{|}AC| \;\Rightarrow\; \frac{AC_1}{AC} = \frac{AB_1}{AB}.$$

Треугольник AB_1C_1 подобен треугольнику ABC. $\angle AB_1C_1 = \angle ABC$, $\angle AC_1B_1 = \angle ACB$. Аналогично доказывается подобие треугольников BA_1C_1 и CA_1B_1

треугольнику ABC. Далее из равенства $\angle AB_1C_1 = \angle CB_1A_1$ и отношения $BB_1 \perp AC$ следует, что BB_1 – биссектриса угла $C_1B_1A_1$. Также другие высоты $\triangle ABC$ являются биссектрисами $\triangle A_1B_1C_1$.

Следующая задача формулируется как задача на доказательство. Однако в доказательстве решающую роль играют вспомогательные построения.

Задача 17. Доказать, что ортотреугольник остроугольного треугольника ABC имеет наименьший периметр среди всех вписанных треугольников.

Задача 18. Этот прием до недавнего времени применяли радиолюбители при расчете сопротивления цепи. Пусть величины сопротивлений R_1 и R_2 заданы отрезками соответствующей длины (рис. 31). При последовательном их

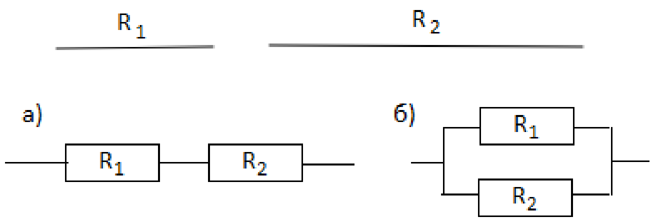

Рис. 31. Чертеж к задаче 18

соединении сопротивление участка цепи равно сумме данных сопротивлений: $R = R_1 + R_2$ (см. рис. 31а). А при параллельном соединении сопротивление участка цепи считается по формуле $R = \frac{R_1\dot{R}_2}{R_1+R_2}$ (см. рис. 31б). Последнюю задачу радиолюбители часто решали геометрически на листке бумаги в клеточку. Таким образом, требуется геометрически найти значение R при параллельном соединении, т. е. построить отрезок длины $R = \frac{R_1\dot{R}_2}{R_1+R_2}$.

Задача 19. На доске нарисовали квадрат. На каждой стороне квадрата случайным образом выбрали точку. После этого квадрат стерли. Можно ли по оставшимся четырем точкам восстановить квадрат?

Решения

Решение 1. Продолжим прямую AB. Построим биссектрису внешнего угла A (п. 3). Для этого проведем прямые a_1 и a_2, параллельные соответствующим сторонам внешнего угла A и проходящие на расстоянии ширины линейки h от них. M_1 – точка их пересечения (рис. 32). Тогда

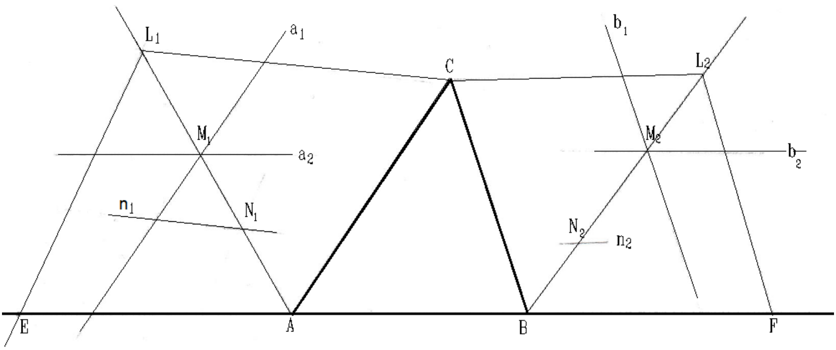

Рис. 32. Чертеж к задаче 1

прямая AM_1 будет биссектрисой. Прямые AC и AB симметричны относительно биссектрисы AM_1. Возьмем произвольную точку L_1, отличную от A, на биссектрисе. Проведем через точку L_1 прямую n_1, параллельную L_1C на расстоянии h от нее. N_1 – точка пересечения n_1 с биссектрисой. Прямые L_1C и n_1 образуют правую h-пару параллельных прямых относительно точек L_1 и N_1. Проведем теперь левую h-пару через точки L_1 и N_1. Та из прямых, образующих эту пару, что проходит через точку L_1, симметрична прямой L_1C относительно биссектрисы. E – точка ее пересечения с прямой AB. Точка E симметрична точке C относительно биссектрисы (п. 5–6). Следовательно, $AE = AC$. Аналогично на продолжении стороны AB строим отрезок BF, равный BC. Таким образом, $|EF|$ равен $|EA|+|AB|+BF|$, а значит, и периметру треугольника ABC. $\boxed{З1}$

Решение 2. Для точек A и B проведем левую и правую h-пары параллельных прямых (см. рис. 3а). Пусть N и K – точки их пересечения, отличные от A и B. Тогда AB и NK перпендикулярны и делятся в точке их пересечения пополам. Значит, прямая NK проходит через середину стороны AB треугольника ABC. Аналогично построим перпендикуляр, проходящий через середину стороны BC. Точка пересечения этих перпендикуляров и будет центром описанной окружности. $\boxed{З2}$

Решение 3. Построим бессектрисы углов A и B (п. 4). Точка их пересечения и будет центром описанной окружности. $\boxed{З3}$

Решение 4. Найдем середину стороны AB (п. 3) и обозначим ее M. Прямая CM будет медианой. Аналогично построим медиану, проведенную из вершины A. Точка пересечения этих двух медиан и будет искомой точкой. $\boxed{З4}$

Решение 5. Проведем через точку C перпендикуляр к прямой AB (п. 6), а через точку A – перпендикуляр к прямой DC. Точка пересечения этих перпендикуляров и будет искомой точкой $\boxed{З5}$.

Решение 6. Построим точку B_1, симметричную B относительно линии берега (п. 6). Соединим точки A и B_1 отрезком прямой (рис. 33). K – точка пересечения прямых k

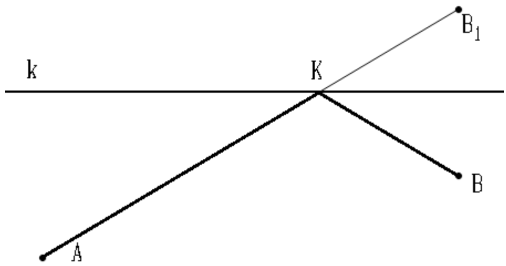

Рис. 33. Чертеж к задаче 6

и AB_1. Мы утверждаем, что найденное таким образом положение K оптимальное. Действительно, при любом положении K имеет место равенство $|KB|= |KB_1|$. Значит, оптимальному маршруту AKB соответствует оптимальный маршрут AKB_1. Но длина маршрута AKB_1 минимальна, когда точка K лежит на прямой AB_1. $\boxed{З6}$

Если представить, что линия берега k – это зеркало, то маршрут становится кратчайшим, если туристы движутся, как луч света: «угол падения равен углу отражения».

Решение 7. Построим луч b_1, симметричный лучу b относительно c (рис. 34). Построим точку A_1, симметричную A

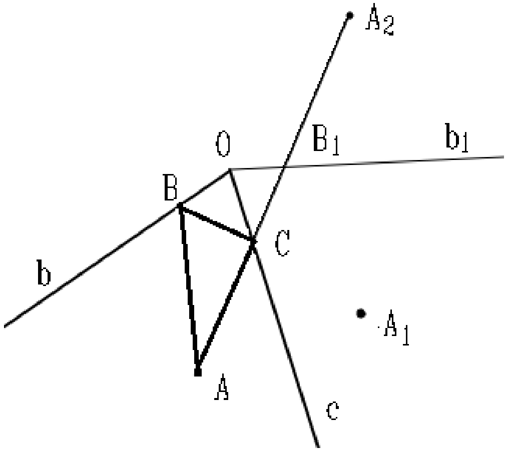

Рис. 34. Чертеж к задаче 7

относительно прямой c и точку A_2, симметричную A_1 относительно луча b_1. Тогда каждому маршруту $ACBA$ будет соответствовать равный по длине ACB_1A_2. Установим контейнер C в точке пересечения отрезка AA_2 и луча c. Отрезок AA_2 пересекает луч b_1 в точке B_1. Контейнер B поставим в точку, симметричную B_1 относительно луча c. $\boxed{37}$

Решение 8. Отобразим маршрут муравья симметрично относительно оси b (линии левой боковой стенки коробки). При этом точка B останется на месте, а точки A, C и E отобразятся в точки A_1, C_1 и E_1 (рис. 35). Участок маршрута муравья BC

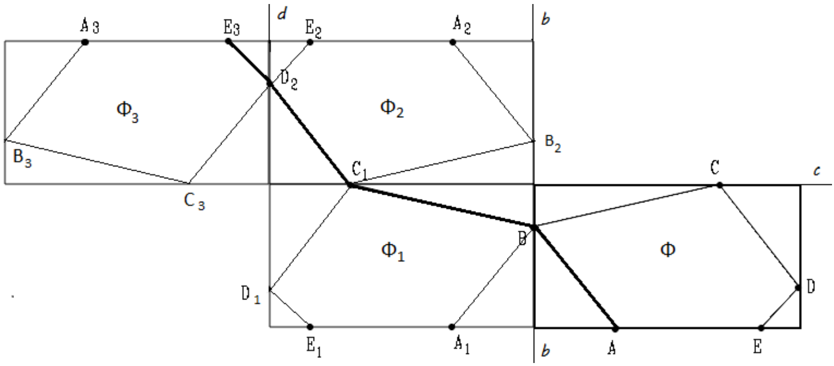

Рис. 35. Чертеж I к задаче 8

отобразится в BC_1. Назовем исходную фигуру Φ, а ее образ Φ_1. Теперь отобразим фигуру Φ_1 симметрично относительно оси c (линии задней стенки коробки). Полученную фигуру назовем Φ_2. При последнем преобразовании точка C_1 останется на месте. В результате двух симметричных отображений точка D перейдет в точку D_2, а отрезок CD – в отрезок C_1D_2. Отобразим фигуру Φ_2 симметрично относительно оси d (продолжение образа линии правой боковой стенки при первом симметричном отображении). Точка E в результате трех симметричных отображений перейдет в точку E_3. Нетрудно заметить, что длина ломаной ABC_1D_2E3 равна длине $ABCDE$ (длине маршрута муравья). Значит, маршруту $ABCDE$ наименьшей длины будет соответствовать маршрут ABC_1D_2E3 наименьшей длины. Но последний можно построить, соединив точки A и E_3 отрезком прямой (рис. 36). Точка B получится при

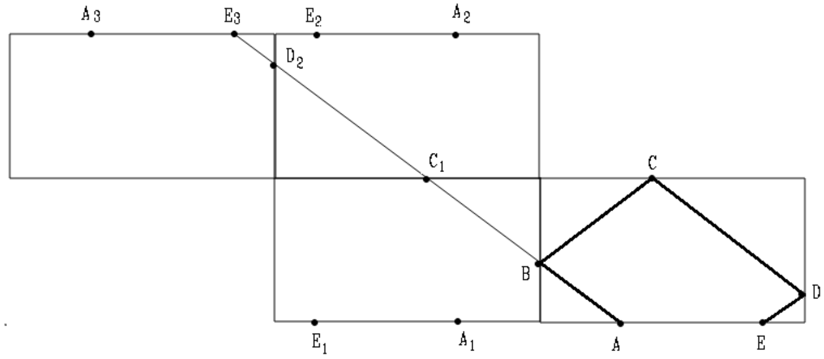

Рис. 36. Чертеж II к задаче 8

пересечении прямой AE_3 с линией «левой боковой стенки коробки», точку C можно построить как прообраз C_1 при первом симметричном отображении, а точку D – как прообраз D_2 при двух симметричных преобразованиях. Полученный маршрут $ABCDE$ будет оптимальным. $\boxed{З8}$ Интересно, что муравью, как туристам из задачи 6 и почтальону из задачи 7, пришлось «соблюдать» известный закон физики: «угол падения равен углу отражения». Попробуйте доказать, что $AB \parallel CD$, а $BC \parallel DE$.

Решение 9. Проведем прямую FC, а затем через точку E – прямую, параллельную FC (п. 8). L – точка ее пересечения с прямой BC. Тогда $LC = EF$, как противоположные стороны параллелограмма. Через точку L проведем прямую, параллельную AC (рис. 37).

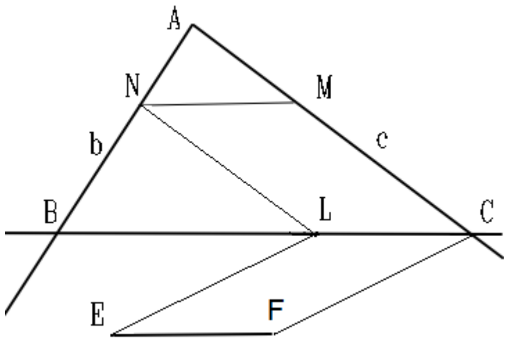

Рис. 37. Чертеж к задаче 9

N – точка ее пересечения с прямой AB. Через точку N проведем прямую, параллельную BC. M – точка ее пересечения с прямой AC. Тогда $NM = LC$, как противоположные стороны параллелограмма $NMCL$. Для определенности мы рассмотрели случай, когда $|EF| < |BC|$. Если $|EF| = |BC|$, то отрезок, который требуется построить, уже есть – это BC. Если $|EF| > |BC|$, построение аналогично приведенному выше. $\boxed{39}$

Решение 10. Построим отрезок A_1B_1, равный E_0F_0 (рис. 38). От точек A_1 и B_1 проведем лучи, образующие

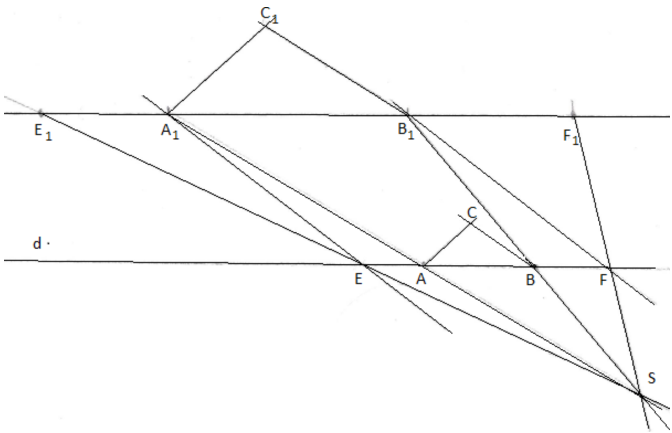

Рис. 38. Чертеж к задаче 10

с A_1B_1 углы, равные $\angle A_0$ и $\angle B_0$ соответственно (п. 14–15). C_1 – точка пересечения этих лучей. Мы построили треугольник $A_1B_1C_1$, подобный тому, что следует построить, с коэффициентом подобия $k = \frac{|A_1B_1|+|B_1C_1|+|C_1A_1|}{|A_1B_1|}$. Иначе говоря, все линейные размеры $\triangle A_1B_1C_1$ в k раз больше требуемых. На продолжении A_1B_1 отложим отрезки $E_1A_1 = A_1C_1$, и $B_1F_1 = B_1C_1$ (см. задачу 1). Таким образом, построен отрезок EF, равный периметру треугольника $A_1B_1C_1$. Проведем в полуплоскости, противоположной полуплоскости треугольника, прямую d, параллельную A_1B_1 и проходящую на расстоянии ширины линейки h от нее. Относительно точек A_1 и B_1 построим h-пару параллельных прямых (для определенности мы взяли левую h-пару). Пусть E и F – точки пересечения этих прямых с d. Они ограничивают на прямой d отрезок, равный A_1B_1. Проведем одну прямую через точки E_1 и E, а другую через точки F_1 и F. Пусть S – точка пересечения прямых EE_1 и FF_1. Любая пара лучей, выходящих из точки S отсекает на прямой A_1B_1 отрезок в k раз большей длины, чем на прямой d. Соединим точку S лучами с точками A_1 и B_1. Обозначим точки пересечения лучей с прямой d через A и B соответственно. Таким образом, отрезок AB будет в k раз меньше A_1B_1. Проведем через точку A прямую, параллельную A_1C_1, а через точку B прямую, параллельную B_1C_1. Пусть C – точка их пересечения. Искомый треугольник ABC построен. $\boxed{\text{З10}}$

Решение 11. Построим середину отрезка AC точку M (рис. 39). Проведем прямую b через точки B и M, а через точки A и C – прямые a и c, параллельные b. $\boxed{\text{З11}}$

Решение 12. Точка C – середина отрезка AB. $\boxed{\text{З12}}$

Решение 13. Задача имеет три решения в зависимости от того, какую пару точек мы примем за середины противоположных сторон (рис. 40). Например, возьмем точки N и M. Через точку L проведем прямую g, параллельную NM.

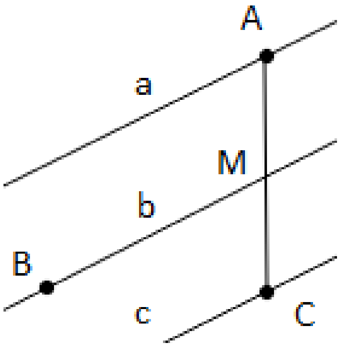

Рис. 39. Чертеж к задаче 11

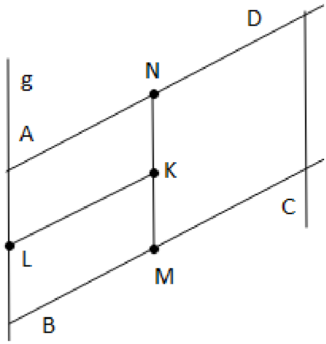

Рис. 40. Чертеж к задаче 13

Построим середину отрезка NM – точку K. Проведем через точки N и M прямые, параллельные LK. Они пересекутся с прямой g в точках A и B соответственно. На прямых AN и BM по другую сторону от точек N и M отложим отрезки ND и MC, равные AN. Таким образом, мы построили параллелограмм $ABCD$. $\boxed{\text{З13}}$

Решение 14. Построим биссектрису b угла aOc (рис. 41). Через точку M проведем прямую, перпендику-

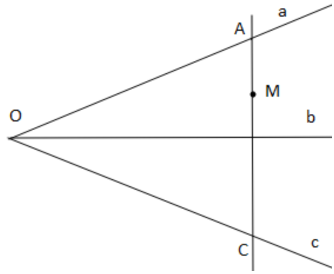

Рис. 41. Чертеж к задаче 14

лярную биссектрисе. Эта прямая отсечет на сторонах угла равные отрезки OA и OB. $\boxed{\text{З14}}$

Решение 15. Из вершины угла mOn проведем луч b, проходящий через точку M (рис. 42). На сторонах угла nOb построим точки $K \in n$ и $P \in b$, такие, что $|KP|= a$ и $KP\perp b$. На сторонах угла mOb построим точки $L \in m$ и $R \in b$, такие, что $|LR|= b$ и $LR\perp b$. Похожие построения мы выполняли в задаче 9. Соединим точки K и L отрезком прямой. S – точка пересечения KL и b. Треугольники SKP и SLR подобны по двум углам: $\angle KPS$ и $\angle LRS$ – прямые, а $\angle KSP = \angle LSR$ – вертикальные. Следовательно, $KS : SL = KP : LR$. Проведем через точку M прямую, параллельную KL. Точки пересечения этой прямой

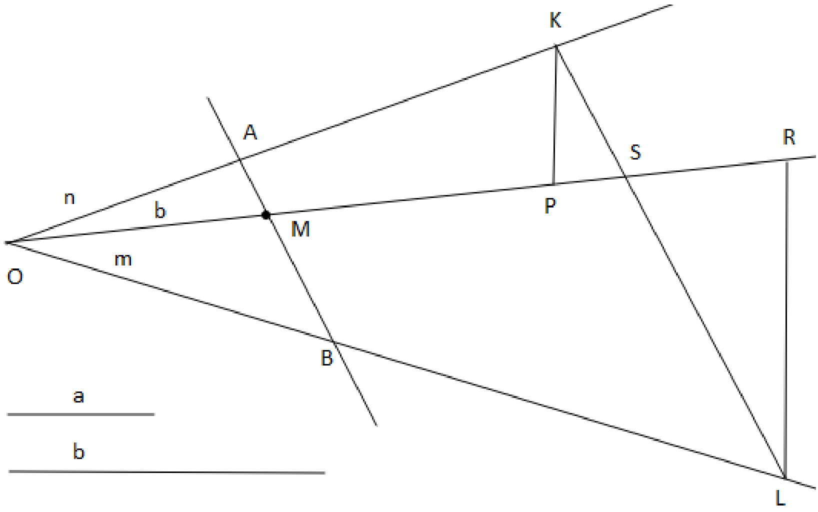

Рис. 42. Чертеж к задаче 15

со сторонами угла n и m обозначим A и B соответственно. Точка M разбивает отрезок AB на части, относящиеся как $a : b$. $\boxed{З15}$

Решение 16. Построим биссектрисы треугольника $A_1B_1C_1$ (рис. 43). Через точки A_1, B_1 и C_1 проведем перпендикуляры к соответствующим биссектрисам. Точки пересечения этих перпендикуляров и будут вершинами треугольника ABC. $\boxed{З16}$

Решение 17. Пусть точка A_1 лежит на стороне BC треугольника ABC (рис. 44). Для начала построим треугольник наименьшего периметра $A_1B_1C_1$, вписанный в $\triangle ABC$,

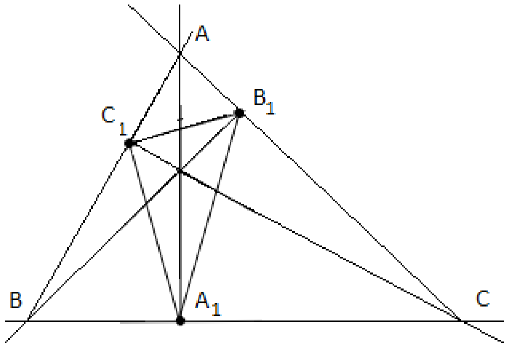

Рис. 43. Чертеж к задаче 16

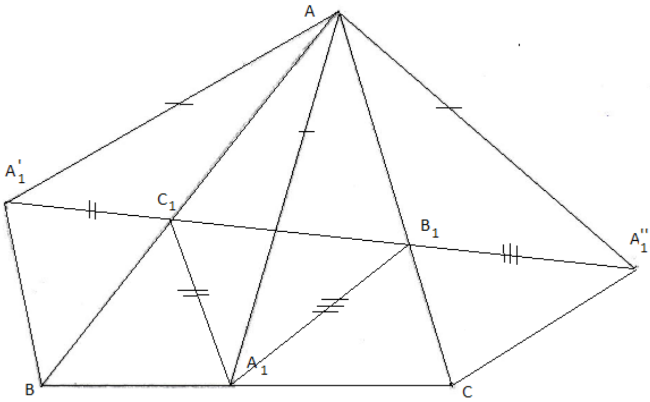

Рис. 44. Чертеж к задаче 17

с заданным положением точки A_1. Построим точку A_1', симметричную A_1 относительно оси AB, и точку A_1'', симметричную A_1 относительно оси AC. Возьмем точку C_1 на отрезке AB и точку B_1 на отрезке AC. Так как $A_1'C_1 = A_1C_1$ и $A_1''B_1 = A_1B_1$, то любому маршруту

$A_1C_1B_1A_1$ соответствует равный ему маршрут $A_1'C_1B_1A_1''$. Но маршрут $A_1'C_1B_1A_1''$ наименьшей длины мы получим, если соединим точки A_1' и A_1'' отрезком прямой. Пока мы построили оптимальный вписанный треугольник при заданном положении A_1. Осталось найти оптимальное положение A_1. Рассмотрим $\triangle A_1'AA_1''$. Независимо от положения A_1 на стороне BC имеет место равенство $\angle A_1'AA_1'' = 2\dot{\angle} BAC$. Поскольку $\triangle A_1'AA_1''$ равнобедренный с боковыми сторонами, равными AA_1, основание треугольника $A_1'A_1''$ примет наименьшее значение при наименьшем AA_1, т. е. при $AA_1 \perp BC$, когда AA_1 – высота треугольника ABC. Отсюда следует, что вписанный треугольник наименьшего периметра – ортотреугольник. $\boxed{\text{З17}}$

Решение 18. Построим единичный отрезок AB (рис. 45). Длина отрезка в данном случае не имеет значения, единичным мы его сделали для определенности. Из точки A проведем перпендикуляр и отложим на нем отрезок AD длины R_1. По ту же сторону от прямой AB проведем перпендикуляр из точки B и отложим на нем отрезок BC длины R_2. Соединим отрезками пары точек A и C, B и D. Пусть M – точка пересечения этих отрезков. Опустим из точки M перпендикуляр MN на прямую AB. Мы утверждаем, что длина этого перпендикуляра равна R. Действительно, из подобия треугольников ADB и NMB

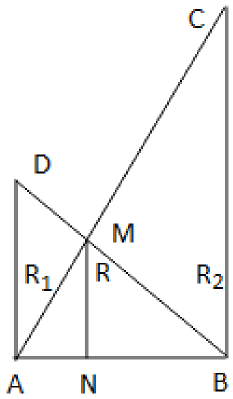

Рис. 45. Чертеж к задаче 18

следует $\frac{R}{R_1} = \frac{NB}{AB}$. Из подобия треугольников BCA и NMA следует $\frac{R}{R_2} = \frac{AB-NB}{AB}$. Сложив два последних равенства, получим:

$$\frac{R}{R_1} + \frac{R}{R_2} = 1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R} \;\Rightarrow\; R = \frac{R_1\dot{R}_2}{R_1 + R_2}.$$

Длина перпендикуляра MN действительно равна R. $\boxed{\text{З}18}$

Решение 19. Четыре точки должны быть вершинами некоторого выпуклого четырехугольника (рис. 46). Иначе они не могли бы расположиться на сторонах квадрата. Соединим точки B и D отрезком прямой. Через точку A проведем перпендикуляр к прямой BD. На этом перпендикуляре отложим от точки A отрезок AE, равный BD.

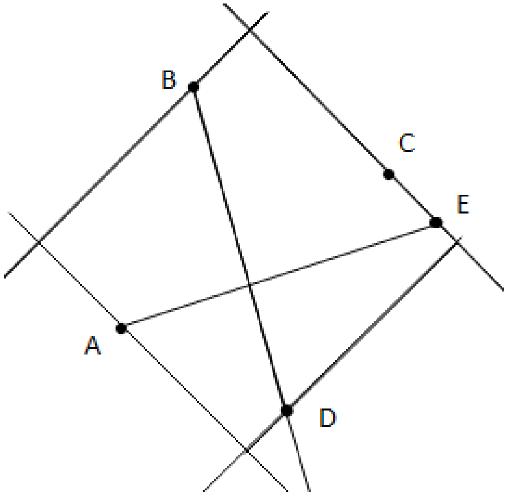

Рис. 46. Чертеж к задаче 19

Точка E будет лежать на той же стороне квадрата, что и точка C. Проведем через точки C и E прямую. Проведем через точки B и D прямые, перпендикулярные CE. Пусть K и L – точки их пересечения с CE. Через точку A проведем прямую, параллельную AB. T и R – точки ее пересечения с прямыми BK и DL. $TKLR$ – квадрат, на сторонах которого лежат точки A, B, C и D. Как видно из построения, в случае, если $AC \perp BD$, точка E совпадет с C и задача будет иметь бесконечное множество решений.

$\boxed{\text{З19}}$

Биографические справки

Адлер Август (1863–1923) – австрийский и чешский математик, геометр, астроном и геодезист. Окончил Венский университет. Стажировался в Берлинском Техническом и Геттингенском университетах. Приват-доцент Высшей технической школы в Вене.

Александров Иван Александрович (1856–1919) – русский математик-педагог. Окончил физико-математический факультет Санкт-Петербургского университета (1878), преподавал в Тамбовской гимназии. После переезда в Москву преподавал математику в реальном училище Бажанова, в женской гимназии Бот, в гимназии Поливанова, в Народном институте им. Шанявского и на вечерних курсах Межевого института. Автор более 30 работ по методике преподавания математики.

Аргунов Борис Иванович (1907–1985) – советский математик. Окончил педагогический факультет Смоленского государственного университета (1929). Участник Великой Отечественной войны.

Балк Марк Беневич (1923–2018) – советский и российский математик, популяризатор математики. Окончил Омский педагогический институт (1945). Автор ряда книг для школьников и студентов.

Блинков Александр Давидович (1953) – советский и российский математик-педагог. Окончил математический факультет МПГУ (1975), работал учителем математики. С 2003 г. – сотрудник Московского интститута открытого образования. Автор учебных пособий для учащихся средней школы.

Брианшон Шарль Жульен (1783–1864) – французский математик и химик. Окончил Политехническую школу в Париже (1808). Профессор Артиллерийской школы Королевской Гвардии в Венсене (1818).

Брюс Яков Вилимович (1669–1735) – выдающийся российский государственный деятель, генерал-фельдмаршал, реформатор русской артиллерии, дипломат, инженер и ученый, руководитель Школы математических и навигационных наук. Представитель знатного шотладского рода, он родился в Москве в Немецкой слободе, где получил отличное домашнее образование. С детства увлекся математикой и естественными науками. В возрасте 14 лет записался в потешные войска царя и стал верным сподвижником Петра I. Принимал непосредственное участие во множестве военных кампаний. В период войны со шведами разработал скорострельные пушки и мощный порох, новые виды картечи и бомб. Между войнами занимался развитием российской промышленнсти. В 1717 г.

назначен сенатором и президентом Мануфактур-коллегии, а в 1719 г. – президентом Берг-коллегии (орган по руководству горнорудной промышленностью), ведал всеми российскими заводами. Свободно владел шестью европейскими языками. Изготовил научные инструменты и приборы, которыми еще долго после его смерти пользовались российские ученые, в том числе Михаил Васильевич Ломоносов. В народе Брюс имел репутацию колдуна и чернокнижника.

Ванцель Пьер Лоран (1814–1848) – французский математик и механик. Учился в Политехнической школе в Париже. Доказал неразрешимость классических задач трисекции угла и удвоения куба.

Декарт Рене (1596–1650) – французский философ, математик, механик, физик и физиолог. Закончил иезуитский колледж Ла Флеш. С 1617 г. в офицерском чине находился на военной службе в революционной Голландии, затем в Германии, сражался за Прагу, принимал участие в осаде крепости Ла-Рошель. Как человек, отличавшийся свободомыслием, по возвращении во Францию вскоре был заподозрен иезуитами в ереси и потому вынужден переехать в Голландию, где в течение 20 лет им были написаны выдающиеся научные работы. Декарт переработал математическую символику Виета и создал новую, близкую к современной. Введенная им «декартова» система координат позволила установить соответствие между алгебраическими уравнениями и широким классом кривых на плоскости. Задолго до Ньютона пришел к выводу, что основным видом движения является движение по инерции, ввел понятие «количество движения» и впервые сформулировал закон сохранения движения.

Зетель Семен Исаакович (1896–1977) – российский и советский математик. Окончил математическое отделение МГУ (1930). Автор учебных пособий по элементарной геометрии.

Костовский Александр Никитович (1917–2005) – советский и украинский математик, профессор Львовского университета. Окончил физико-математический факультет Мелитопольского государственного педагогического института (1941).

Ламберт Иоганн Генрих (1728–1777) – немецкий физик, философ, математик и астроном. Впервые доказал иррациональность числа π, усовершенствовал ряд геодезических методов.

Магницкий Леонтий Филиппович (1669–1739) – русский математик и педагог. Окончил Славяно-греко-латинскую академию (1694) – первое в России высшее учебное заведение. Самостоятельно изучил математику.

В 1701 г. Петр I назначил Л. Ф. Магницкого преподавателем Школы математических и навигационных наук, ему было поручено написать учебник по математике. Уже в 1703 г. знаменитая «Арифметика» Магницкого вышла тиражом 2400 экземпляров. Это был первый изданный в нашей стране учебник математики. И более полувека «Арифметика» Магницкого в России оставалась основным учебником математики.

Маскерони Лоренцо (1750–1800) – итальянский математик. Изучал физику и математику в семинарии в Бергамо. Профессор Павийского университета (1786). Повторно доказал теорему Мора – Маскерони, поскольку работа Георга Мора была забыта современниками.

Михеев Юрий Викторович (1947) – советский и российский математик-педагог. Окончил механико-математический факультет Новосибирского государственного университета (1969). Работал в Специализированном учебно-методическом центре НГУ (СУНЦ НГУ) им. академика М. А. Лаврентьева. Автор работ по методике преподавания математики, а также учебников и учебных пособий для средней школы.

Мор Георг (1640–1697) – датский математик. Изучал математику под руководством Христиана Гюйгенса. Доказал, что любое построение конфигурации точек, которое можно выполнить с помощью циркуля и линейки, выполняется посредством одного циркуля (теорема Мора – Маскерони).

Понселе Жан-Виктор (1788–1867) – французский математик, механик и инженер, создатель проективной геометрии, член Парижской и член-корреспондент Петербургской академий наук. Окончил Политехническую школу в Париже. В чине поручика был направлен в инженерные войска. После тяжелого ранения попал в плен (1812). Находясь в плену в Саратове, написал трактаты о проективных свойствах фигур и по аналитической геометрии. Вернувшись во Францию, преподавал в военной школе, где ввел в употребление русские счеты, с которыми познакомился в саратовском плену.

Прасолов Виктор Васильевич (1956) – российский математик и историк математики, преподаватель специализированного учебно-научного центра МГУ. Окончил механико-математический факультет МГУ (1978).

Пюркенштейн Антон Эрнст Буркхард фон (1686–1744) – австрийский барон, военный инженер, фортификатор, автор книги «Эрц-герцогские приемы циркуля и линейки, или Избранные начала математических наук». Состоял учителем геометрии у сына императора Священной Римской империи и короля Венгрии

Леопольда I. В год издания «Приемов циркуля и линейки» фон Пюркенштейна его ученику, будущему императору Иосифу I, испольнилось 8 лет.

Смогоржевский Александр Степанович (1896–1969) – советский математик. Окончил Киевский институт народного образования (1929). Работал в Киевском политехническом институте. Автор более 80 работ, в том числе учебников и научно-популярных книг.

Четверухин Николай Федорович (1891–1974) – советский математик. Окончил физико-математический факультет Московского университета (1915). Работал в Иваново-Вознесенском институте народного образования, Московском университете, Московском педагогическом институте, Московском авиационном институте. Автор более 90 работ, среди которых значительное место занимают труды по теории геометрических построений.

Штейнер Якоб (1796–1863) – швейцарский математик, основатель синтетической геометрии кривых линий и поверхностей 2-го и выше порядков. Окончил Гейдельбергский университет (1821). Член Берлинской академии наук.

Список литературы

[1] Адлер Август. Теория геометрических построений / Август Адлер. – Одесса : Mathess, 1910. – 328 с.

[2] Александров И. И. Сборник геометрических задач на построение с решениями / И. И. Александров. – Москва : Государственное учебно-педагогическое издательство, 1950. – 178 с.

[3] Аргунов Б. И. Геометрические построения на плоскости / Б. И. Аргунов, М. Б. Балк. – Москва : Государственное учебно-педагогическое издательство, 1957. – 268 с.

[4] Блинков А. Д. Геометрические задачи на построение / А. Д. Блинков, Ю. А. Блинков. – Москва : Издательство МЦНМО, 2012. – 152 с.

[5] Воронец А. М. Геометрия циркуля / А. М. Воронец. – Москва ; Ленинград : Государственное технико-теоретическое издательство, 1934. – 42 с.

[6] Зетель С. И. Геометрия линейки и геометрия циркуля / С. И. Зетель. – Москва : Издательство Академии педагогических наук РСФСР, 1950. – 108 с.

[7] Костовский А. Н. Геометрические построения одним циркулем / А. Н. Костовский. – Москва : Наука, 1984. – 80 с.

[8] Михеев Ю. В. Одной линейкой / Ю. В. Михеев // Квант. – 1980. – № 10. – С. 26–29.

[9] Прасолов В. В. Задачи по планиметрии / В. В. Прасолов. – Москва : Московский учебник, 2006. – 640 с.

[10] Смогоржевский А. С. Линейка в геометричеких построениях / А. С. Смогоржевский. – Москва : Мир, 1987. – 79 с.

[11] Четверухин Н. Ф. Методы геометрических построений / Н. Ф. Четверухин. – Москва : Учпедгиз, 1952. – 148 с.

[12] Штейнер Я. Геометрические построения, выполняемые с помощью прямой линии и неподвижного круга / Я. Штейнер. – Москва : Государственное учебно-педагогическое издательство, 1939. – 82 с.

Вышли в печать книги серии «Математика не для ЕГЭ»:

Белый Е. К. **Симметрические уравнения**. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2021. – 94 с.

Книга позволит освоить методы решения систем не только симметрических алгебраических уравнений, но и целого класса других, сводящихся к симметрическим.

Белый Е. К. **Введение в Microsoft Access**. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2020. – 176 с.

Книга позволит получить основные навыки создания баз данных в Microsoft Access. В процессе работы над ней автор придерживался принципа: лучший способ освоить язык программирования – написать на нем программу.

Белый Е. К. **Символы и их творцы**. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2018. – 72 с.

В книге рассказывается о происхождении наиболее известных математических символов. Некоторые из них знакомы нам еще с младших классов. Кажется, что они были всегда, но на самом деле почти все эти символы появились недавно – в течение последних столетий, и их авторы известны.

Белый Е. К. **Вредная геометрия**. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2017. – 36 с.

Книга посвящена особому классу геометрических задач, которые называют «софизмами». Суть их в том, что требуется найти ошибку в заведомо ложном доказательстве. Вам будет предложено найти ошибку в доказательствах «теорем»: «все углы прямые», «все треугольники правильные» и т. д. Такие задачи наилучшим образом способствуют развитию логического мышления.

Белый Е. К. **Египетский счет**. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2017. – 36 с.

В книге в форме рассказа рассмотрены несколько задач на последовательное удвоение чисел. Первая задача связана со способом умножения и деления, которым пользовались в Древнем Египте. Поскольку египетский счет позволяет обучить любого человека делению и умножению, минуя мучительную стадию заучивания таблицы умножения, он был широко распространен в Европе вплоть до начала XX в.

Белый Е. К. **Прогрессии**. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2016. – 132 с.
Первые две главы книги посвящены арифметическим, геометрическим, а также арифметико-геометрическим прогрессиям. В третьей главе дается представление об использовании прогрессий в финансовых вычислениях.

Белый Е. К., Дорофеева Ю. А. **Алгебраические уравнения**. – Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2015. – 240 с.
В пособии собраны наиболее эффективные методы решения алгебраических уравнений и их систем.

Книги можно найти в сети Интернет, в частности на сайте «Учительский портал»: https://www.uchportal.ru/.

Учебное издание

Белый Евгений Константинович

Математика не для ЕГЭ

Геометрия двусторонней линейки

Учебное пособие для учащихся средних школ

Редактор *Е. Е. Порывакина*

Оформление обложки *Е. Ю. Тихоновой*

Компьютерная верстка *Е. К. Белого*

Подписано в печать 22.04.22. Формат 60x84 1/16.
Бумага офсетная. Уч.-изд. л. 2,8. Тираж 50 экз.
Изд. № 43

Отпечатано в типографии Издательства ПетрГУ
185910, г. Петрозаводск, пр. Ленина, 33