Ломакина Татьяна Евгеньевна,

Сумарокова Лилия Зуфаровна.

Учителя математики.

Государственное общеобразовательное учреждение

"Физико-математический лицей-интернат"

Республики Коми, г. Сывтывкар

**Диафантовы уравнения.**

**Методическая разработка.**

*В пособии собраны методические материалы по методам решения диофантовых уравнений и задач сводящихся к решению диофантовых уравнений. Пособие адресовано учителям математики образовательных организаций, осуществляющих внеурочную деятельность по предмету с учащимися 7-9 классов.*

# Введение

В условиях перехода на ФГОС основного общего образования принципиально изменяется не только организация, но и суть образовательного процесса. Меняются смысл и значение образования.

В связи с предъявленными новыми требованиями к организации образовательного процесса нам пришлось обратиться к поиску инновационных технологий, форм и методов обучения. Приоритетным становится развивающая функция обучения. Общим понятием для всех имеющихся теорий развивающего обучения является понятие деятельности.

 Большие возможности для осуществления деятельностного подхода даёт внеурочная деятельность. В течение многих лет в лицее-интернате ведется элективный курс по математике для учащихся 7-9 классов. – «Решение олимпиадных задач по математике». Тематика курса составлена с таким расчетом, чтобы систематизировать и обобщить полученные на уроках знания учащихся, одновременно расширяя и углубляя их, а также рассмотреть некоторые вопросы, изучение которых не предусмотрено школьной программой.

Основными задачами курса являются: формирование умений и навыков решения нестандартных задач, алгоритм которых заранее не известен, знакомство учащихся с задачами олимпиадной тематики и основными методами их решения, расширение и углубление знаний учащихся по темам, примыкающим к основному курсу. Курс посещают все желающие расширить свои знания по предмету, то есть сформировать прочное и сознательное овладение системой математических знаний и умений, необходимых каждому ученику для продолжения образования.

Данное методическое пособие посвящено методам решения диофантовых уравнений и задач, сводящихся к решению диофантовых уравнений. В нем содержаться задания, и примеры решений, разбираемые с учащимися во время «Элективного курса».

# Диофантовы уравнения первой степени

Исследование диофантовых уравнений относится к области пограничной между теорией чисел и аналитической геометрией.

Решение уравнений в целых числах является одной из древнейших математических задач. Уже в начале 2-го тысячелетия до н. э. вавилоняне умели решать системы таких уравнений с двумя неизвестными. Наибольшего расцвета эта область математики достигла в Древней Греции. Основным источником является "Арифметика" Диофанта (вероятно, 3 в. н. э.), содержащая различные типы уравнений и систем. В ней Диофант предвосхищает ряд методов исследования уравнений 2-й и 3-й степеней, развившихся только в 19 в. Создание древнегреческими учеными теории рациональных чисел привело к рассмотрению рациональных решений неопределенных уравнений. Эта точка зрения последовательно проводится в книге Диофанта. Хотя сочинение Диофанта содержит лишь решения конкретных диофантовых уравнений, однако есть основания считать, что он владел некоторыми общими приемами.

Современной постановкой диофантовых задач мы обязаны Ферма. Именно он поставил перед европейскими математиками вопрос о решении неопределённых уравнений только в целых числах. Надо сказать, что это не было изобретением Ферма - он только возродил интерес к поиску целочисленных решений. А вообще задачи, допускающие только целые решения, были распространены во многих странах в очень далёкие от нас времена. На протяжении веков математики надеялись отыскать общий способ решения любого диофантова уравнения. Однако в 1970 г. ленинградский математик Ю.В. Матиясевич доказал, что такого общего способа быть не может.

В нынешней математике существует целое направление, занимающееся исследованиями диофантовых уравнений, поиском способов их решений. Называется оно диофантовым анализом и диофантовой геометрией, поскольку использует геометрические способы доказательств.

**Определение:** Уравнения, в которых требуется найти целые решения, называются диофантовыми уравнениями.

Уравнения вида , где , , - целые числа, причем хотя бы одно из чисел и отлично от нуля, в которых требуется найти целочисленные решения, называются диофантовыми уравнениями.

Рассмотрим уравнение .

Пусть , значит и , где числа  и взаимно простые. Тогда исходное уравнение примет вид: . Если данное уравнение имеет решение в целых числах и , то правая часть уравнения делится на , а значит и делится на . В противном случае, если не делится на , то уравнение не имеет решение в целых числах.

Если , то исходное уравнение примет вид: , где числа  и взаимно простые.

Поэтому задача свелась к решению уравнения  при взаимно простых  и .

**Теорема.**

Уравнения вида , где , , - целые числа, причем , имеет решение в целых числах. При этом, если пара целых чисел ,  удовлетворяет данному уравнению, то все остальные решения уравнения задаются равенствами ,, .

**Доказательство.**

Так как , то по линейном представлении НОД чисел  и  найдутся такие целые числа  и , что . Умножая обе части равенства на , получим . Числа ,  являются целыми и удовлетворяют равенству. Значит пара целых чисел ,  является решением исходного уравнения .

Рассмотрим произвольное решение данного уравнения. Пусть пара целых чисел ,  удовлетворяет равенству . Кроме того выше показано, что .

Вычитая из первого равенства второе, получим или .

Так как правая часть последнего равенства делится на , то и число делится на . Но  и  взаимно простые числа, значит на  делится число , то есть найдется такое целое число , что. Подставляя его в равенство , получим .

Окончательно имеем, что любое решение уравнения  выражается формулами , , , где ,  - некоторое решение данного уравнения .

Верно и наоборот, если пара целых чисел ,  удовлетворяет уравнению , то для любого целого  пара чисел ,  также является решением этого уравнения.

Действительно, .

Теорема доказана.

**Пример 1.** Решите уравнение в целых числах: .

Так как , а число 20 не делится на 3, то уравнение не имеет решение в целых числах.

**Пример 2.** Решите уравнение в целых числах: .

Так как , то уравнение имеет решение в целых числах.

Пара ,  удовлетворяет уравнению. Тогда , ,  является решением данного уравнения.

**Пример 3.** Решите уравнение в целых числах: .

Так как , разделим обе части уравнения на 6. Получим уравнение. Теперь , значит, уравнение имеет решение в целых числах.

Пара ,  удовлетворяет уравнению. Тогда , ,  является решением данного уравнения.

**Пример 4.** Решите уравнение в целых числах: .

Так как , то уравнение имеет решение в целых числах.

Подобрать пару , , удовлетворяющую уравнению достаточно трудно, поэтому можно воспользоваться следующим методом:

. Подбираем такое , что - целое число. Тогда ,  удовлетворяют уравнению. Тогда , ,  является решением данного уравнения.

**Пример 5.** Решите уравнение в натуральных числах: .

Так как , то уравнение имеет решение в целых числах.

Запишем исходное уравнение в виде:

;

;

. При  дробь  является целым числом. Отсюда , удовлетворяет уравнению. Тогда , ,  является решением данного уравнения.

Для того, чтобы выбрать только натуральные решения уравнения, необходимо решить систему неравенств:

 Тогда  Целые числа ,  и  удовлетворяют полученной системе неравенств.

Тогда пары ; ;  являются натуральными решениями исходного уравнения.

**Пример 6.** Решите уравнение в натуральных числах: .

Так как , то уравнение имеет решение в целых числах.

Запишем исходное уравнение в виде:

;

;

. При  дробь  является целым числом. Отсюда , удовлетворяет уравнению. Тогда пары , ,  являются решением данного уравнения.

Для того, чтобы выбрать только натуральные решения уравнения, необходимо решить систему неравенств:

 Тогда  Целые числа  и  удовлетворяют полученной системе неравенств.

Тогда пары ;  являются натуральными решениями исходного уравнения.

К решению уравнений в целых числах сводятся следующие задачи.

**Пример 7.** Найдите все трехзначные числа, которые при делении на 37 дают остаток 2, а при делении на 11 – остаток 5.

Пусть - искомое число, удовлетворяющее условию задачи. Тогда выполнены равенства , , где , - целые числа. Получим уравнение .

Таким образом, задача свелась к решению уравнения  в целых числах.

Пара , удовлетворяет уравнению. Тогда пары , ,  являются решением данного уравнения.

Тогда , .

По условию задачи, число - трехзначное, а значит должны выполняться неравенства:

, отсюда .

Полученным неравенствам удовлетворяют целые числа  и .

Тогда и  удовлетворяют условию задачи.

**Пример 8.** Найдите наименьшее натуральное число, которое при делении на 2014 дает в остатке 14, а при делении на 2015 – остаток 15.

Пусть - искомое число, удовлетворяющее условию задачи. Тогда выполнены равенства , , где , – целые числа. Получим уравнение .

Таким образом, задача свелась к решению уравнения  в целых числах.

Пара , удовлетворяет уравнению. Тогда пары , ,  являются решением данного уравнения.

Тогда , .

При  число  является наименьшим натуральным числом, удовлетворяющим условию задачи.

**Пример 9.** Сумма всех трехзначных чисел без некоторых двух в 600 раз больше одного из этих чисел. Найдите эти два числа.

Сумма всех трехзначных чисел равна .

Пусть  и  – искомые числа. Тогда получили уравнение в целых числах.

Пара , удовлетворяет уравнению .

Тогда пары , ,  являются решением данного уравнения.

По условию задачи, числа  и  - трехзначные, а значит должны выполняться неравенства:

 Отсюда следует, что 

Полученным неравенствам удовлетворяет целое число .

Тогда искомыми являются числа и .

**Пример 10.** Шалтай-Болтай ходит по прямой, проходя за минуту либо на 37 шагов влево, либо на 47 шагов вправо. За какое наименьшее время он может оказаться на один шаг правее исходной точки?

Фактически, нам требуется найти решение уравнения  в целых неотрицательных числах с наименьшей суммой.

Пара , удовлетворяет уравнению. Тогда пары , ,  являются решением данного уравнения. Сумма принимает наименьшее неотрицательное значение при .

59 минут – наименьшее время, за которое Шалтай-Болтай окажется на один шаг правее исходной точки.

**Пример 11.** У кассира есть только 72-рублевые купюры, а у Вас − только 105-рублевые (у обоих в неограниченном количестве).   
  а) Сможете ли Вы уплатить кассиру один рубль?   
  б) А три рубля?

**Решение**

а) Предположим, что вам это удалось. Пусть Вы отдали кассиру  купюр, а он отдал вам  купюр. Тогда , но левая часть делится на 3, а правая − нет; противоречие. Значит, заплатить кассиру ровно один рубль не получится.   
  б) Да, сможете. Например, если вы дадите кассиру 11 купюр, а он вам отдаст 16 купюр.

**Пример 12.**

На автобусе ездил Андрей   
На кружок и обратно домой,   
Заплатив 115 рублей,   
Покупал он себе проездной.   
  
В январе он его не достал,   
И поэтому несколько дней   
У шофёра билет покупал   
Он себе за 15 рублей. 

А в иной день кондуктор с него   
Брал 11 только рублей.   
Возвращаясь с кружка своего   
Всякий раз шёл пешком наш Андрей.   
  
За январь сколько денег ушло,   
Посчитал бережливый Андрей:   
С удивлением он получил   
Аккурат 115 рублей!   
  
Сосчитайте теперь поскорей,   
Сколько раз был кружок в январе?

Пусть  дней Андрей платил по 15 рублей,  дней − по 11 рублей.

Тогда решение задачи сводится к решению уравнению  в натуральных числах.

Пара чисел и . удовлетворяет условию задачи.

Значит, в январе Андрей посетил кружок 9 раз.

**Пример 13.** Два рыбака поймали 80 рыб, причем 5/9 улова первого составляли караси, а 7/11 улова второго — окуни. Сколько рыб поймал каждый из них?

**Решение**

Из условия задачи следует, что улов первого рыболова кратен 9, а второго — кратен 11. Таким образом, мы должны представить число 80 в виде суммы 80 = 9А + 11B, где А и B — натуральные числа. Поскольку B может принимать только 7 значений от 1 до 7, то просто переберем эти 7 вариантов и посмотрим , при каком из них число 80 − 11B будет кратно 9. Итак, когда B принимает значения от 1 до 7, числа 80 − 11B, соответственно принимают значения 69, 58, 47, 36, 25, 14, 3. Только одно из них (36) нам подходит. Это значит, что первый рыбак поймал 36 рыб (из них 20 карасей), а второй рыбак поймал, соответственно, 44 рыбы (из них 28 окуней).

**Пример 14*.*** Найдите наименьшее натуральное число, которое делится на 17, оканчивается на 17 и имеет сумму цифр, равную 17.

**Решение:**

Искомое число оканчивается на 17, значит, оно может быть представлено в виде, где *n* − натуральное число. С другой стороны, *a* делится на 17, значит, найдется натуральное число *k*, что .

Тогда получим уравнение в натуральных числах .

Пара ,  удовлетворяет уравнению . Тогда пары , ,  являются решением данного уравнения.

Известно, что сумма цифр числа  равна 17, значит, сумма натурального числа *n* равна 9, следовательно, число *n* делится на 9. А это возможно при .

Таким образом, искомое число .

**Пример 15.** Три рыбака вечером наловили рыбы и легли спать. Первый, проснувшись утром, решил не будить остальных. Он разделил рыбу из садка поровну, но одна рыба оказалась лишней; он выбросил ее в воду, забрал третью часть улова и уехал домой. Через час встал второй рыбак. Думая, что он проснулся первым, и не желая будить остальных, проделал то же самое, что и первый: выкинул одну рыбу в воду, забрал третью часть улова и уехал домой. Еще через час все это повторил третий рыбак, думая, что он встал первый. Какое наименьшее количество рыб поймали рыбаки?

**Решение:**

Пусть рыбаки поймали *x* рыб. Первый рыбак взял себе *y* рыб, тогда верно равенство. После того, как первый забрал свою часть улова, осталось 2*y* рыб. Пусть второй рыбак взял себе *z* рыб, тогда верно равенство . После того, как второй рыбак забрал свою часть улова, осталось 2*z* рыб. Пусть третий рыбак взял себе *v* рыб, тогда верно равенство .

Получили систему уравнений в натуральных числах: .

 ;  ; ; .

Пара ,  удовлетворяет уравнению . Тогда пары ,,  являются решением данного уравнения. По условию, *x* − наименьшее натуральное число, значит, . Таким образом, рыбаки поймали 25 рыб.

# Диофантовы уравнения, делимость чисел

**Пример 1.** Несколькоодинаковых по численности бригад сторожей спали одинаковое число ночей. Каждый сторож проспал больше ночей, чем сторожей в бригаде, но меньше чем число бригад. Сколько сторожей в бригаде, если все сторожа вместе проспали 1001 ночь?

Пусть *m* бригад, *n* сторожей в бригаде, *k* ночей спал каждый сторож. Тогда получим уравнение в натуральных числах: 

Число 1001 раскладывается на произведение простых множителей как 7·11·13. По условию задачи имеем, что 7 сторожей в бригаде, 13 бригад, 11 ночей спал каждый сторож.

**Пример 2.** Во всех подъездахдома одинаковое число этажей, а на каждом этаже одинаковое число квартир. При этом число этажей в доме больше числа квартир на этаже, число квартир на этаже больше числа подъездов, а число подъездов больше одного. Сколько этажей в доме, если в нем 105 квартир?

Число 105 раскладывается в произведение простых множителей как 3·5·7. По условию задачи имеем, что 3 подъезда в доме, 5 квартир на этаже и 7 этажей в доме.

**Пример 3.** У капитана Смоллетта двое сыновей и несколько дочерей. Если возраст капитана (конечно, ему меньше ста лет) умножить на количество его детей и на длину его шхуны (это целое число футов), то получится 32118. Сколько лет капитану Смоллетту, сколько у него детей и какова длина его корабля?

**Решение**

Число детей капитана по условию больше 3; возраст капитана и длина корабля в футах, очевидно, тоже больше 3. Число 32118 раскладывается в произведение простых множителей как 2·3·53·101. Есть только один способ способов представления этого числа в виде произведения трёх множителей, каждый из которых больше 3: 6·53·101. Используя разумные ограничения на возраст и количество детей, получаем, что капитану 53 года, он имеет 6 детей, и его лодка имеет длину101 футов.

**Пример 4.** Найдутся ли такие три натуральных числа, что сумма каждых двух из них – степень тройки?

**Решение**

Пусть нашлись три числа, удовлетворяющие условию. Среди них найдутся два числа одной чётности. Их сумма – чётное число, а степень тройки – нечётное число.

# Список литературы

1. Барабанов А.И., Черняковский И.Я.: «Задачи и упражнения по математике». Саратов: Саратовский ун-т, 1965
2. Бухштаб А.А. «Теория чисел». М.: Просвещение, 1966
3. Гальперин Г.А., Толпыго А.К. «Московские математические олимпиады». М.: Просвещение, 1964
4. Грибанов В.У., Титов П.И. «Сборник упражнений по теории чисел»,
5. «Зарубежные математические олимпиады» М.: Наука, 1987
6. Яковлев В.Д. «Городские (районные) математические олимпиады в 8-11 классах. Сыктывкар, РИПКРО МО и ВШ, 1997
7. http://www.problems.ru/