

Решение системы линейных уравнений методом Крамера

Большую роль в математике играет форма записи алгебраических действий, которая нам понадобится для изучения системы линейных уравнений. Выглядит эта форма записи так: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$. Четыре числа a, b, c, d записаны в виде таблицы, имеющей две строки (a, b) и (c, d) и два столбца $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$. Слева и справа в записи стоят вертикальные черточки. Это выражение употребляется для записи разности $ad - bc$ и называется определителем второго порядка.

$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$. Числа a, b, c, d – называются элементами определителя.

Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Тогда главным определителем системы называется определитель, оставленный из коэффициентов при неизвестных x и y . Этот определитель мы будем обозначать греческой буквой Δ , очевидно, что $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$.

Первым вспомогательным определителем системы уравнений называется определитель $\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$. Он получен из главного определителя этой системы уравнений путем замены первого столбца на столбец свободных членов. Этот определитель мы будем обозначать Δ_x (индекс при Δ_x указывает, что в главном определителе Δ первый столбец $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, составленный из коэффициентов при x в системе уравнений, заменен на столбец свободных членов $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$).

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

Теорема. Если главный определитель системы уравнений не равен 0, то система уравнений имеет единственное решение:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$$

Рассмотрим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7. \end{cases}$$

Запишем данную систему уравнений на языке электронных таблиц.

При решении систем уравнений методом Крамера, при составлении главного и дополнительных определителей нас интересуют коэффициент при неизвестных. Запишем данную систему в виде таблицы, состоящую из коэффициентов при x_i , и свободных членов (отделенных от основных чертой).

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & 3 & 7 \end{array}$$

Составим главный и дополнительные определители по данной таблице:

$$\begin{array}{cccc} \begin{array}{ccc} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & 2 & 3 \end{array} & \begin{array}{ccc} -1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 7 & 2 & 3 \end{array} & \begin{array}{ccc} 2 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & -3 \\ 3 & 7 & 3 \end{array} & \begin{array}{ccc} 2 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 7 \end{array} \\ \Delta = & \Delta_{x_1} = & \Delta_{x_2} = & \Delta_{x_3} = \end{array}$$

Корни вычисляются по формулам

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta}$$

В MS Excel есть формула позволяющая упростить процесс подсчета определителя – Функция **МОПРЕД** – возвращает определитель матрицы (матрица хранится в массиве).

Синтаксис: **МОПРЕД(диапазон ячеек)**

Введя коэффициенты системы в ячейки и применив данную функцию можно найти значение определителя матрицы и вычислить корни системы по формуле Крамера.

Практическая работа «Решение систем линейных уравнений методом Крамера»

Цель: Используя приведенные ниже рисунки, изучите способ решения систем линейных уравнений с помощью пакета Excel.

Теория

Функция МОПРЕД - Возвращает определитель матрицы (матрица хранится в массиве).

Синтаксис: МОПРЕД(диапазон ячеек)

Массив - это числовой массив с равным количеством строк и столбцов.

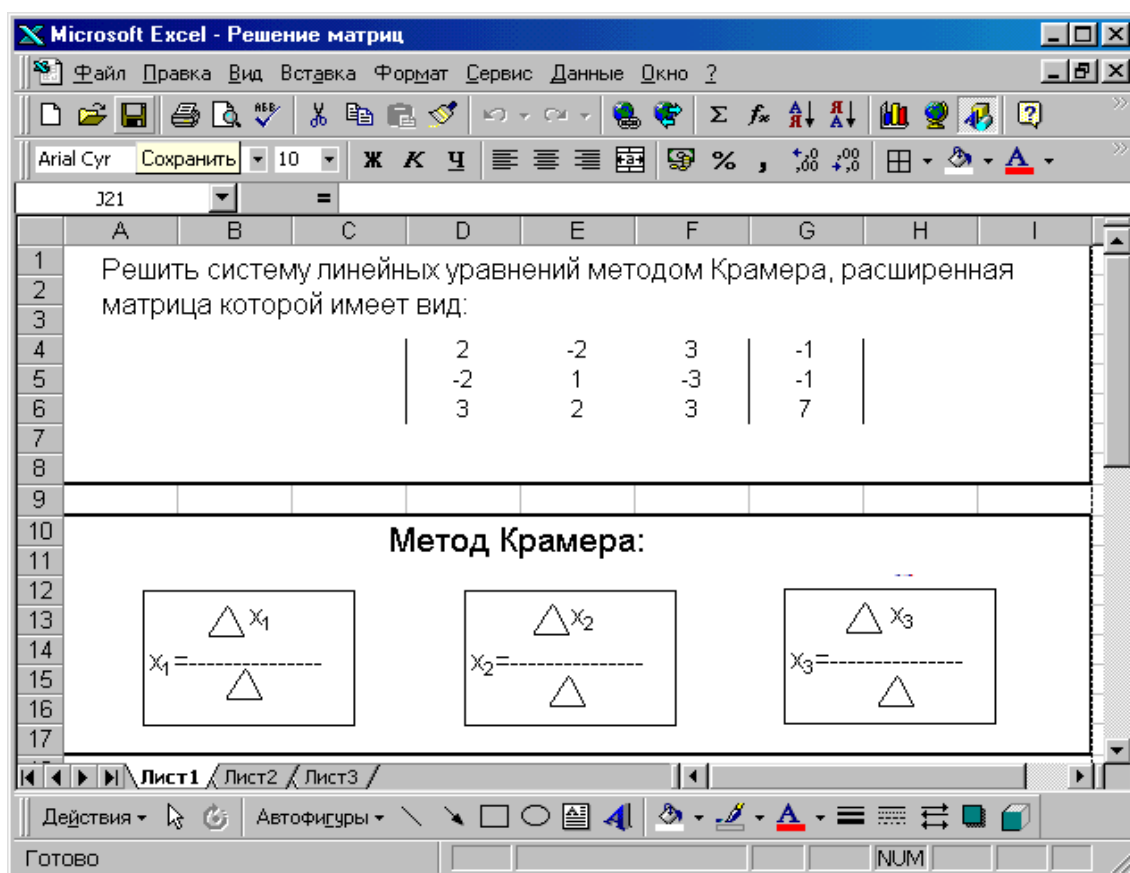
Определитель матрицы - это число, вычисляемое на основе значений элементов массива.

Для массива A1:C3, состоящего из трех строк и трех столбцов, определитель вычисляется следующим образом:

МОПРЕД(A1:C3) равняется $A1*(B2*C3-B3*C2) + A2*(B3*C1-B1*C3) + A3*(B1*C2-B2*C1)$

Возможные ошибки

- Если какая-либо ячейка в массиве пуста или содержит текст, то функция МОПРЕД возвращает значение ошибки #ЗНАЧ!.
- МОПРЕД также возвращает значение ошибки #ЗНАЧ!, если массив имеет неравное количество строк и столбцов.



Microsoft Excel - Решение матриц

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно ?

Arial Cyr 10 Ж К Ч

J31 =

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
18										
19	2	-2	3							
20	-2	1	-3		=МОПРЕД(A19:C21)					
21	3	2	3							
22										
23	-1	-2	3							
24	-1	1	-3		=МОПРЕД(A23:C25)					
25	7	2	3							
26										
27	2	-1	3							
28	-2	-1	-3		=МОПРЕД(A27:C29)					
29	3	7	3							
30										
31	2	-2	-1							
32	-2	1	-1		=МОПРЕД(A31:C33)					
33	3	2	7							
34										

Решение:

$x_1 = E24/E\$20$

$x_2 = E28/E\$20$

$x_3 = E32/E\$20$

Лист1 Лист2 Лист3

Действия Автофигуры

Готово NUM

Microsoft Excel - Решение матриц

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно ?

Arial Cyr 14 Ж К Ч

G22 X ✓ = Ответ:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
18									
19	2	-2	3						
20	-2	1	-3						
21	3	2	3						
22									
23	-1	-2	3						
24	-1	1	-3						
25	7	2	3						
26									
27	2	-1	3						
28	-2	-1	-3						
29	3	7	3						
30									
31	2	-2	-1						
32	-2	1	-1						
33	3	2	7						
34									

Ответ:

$x_1 = 0$

$x_2 = 2$

$x_3 = 1$

Лист1 Лист2 Лист3

Действия Автофигуры

Ввод NUM