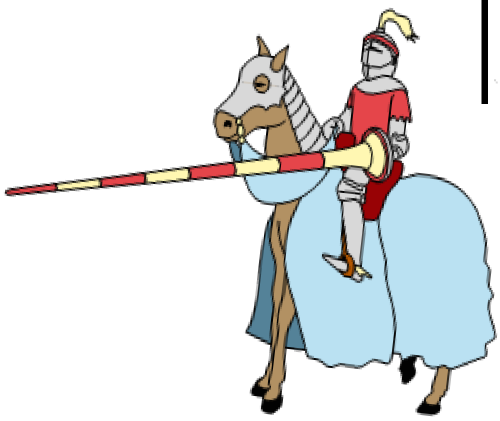
Государственное автономное образовательное учреждение
общеобразовательная школа-интернат Республики Коми
«Коми республиканский физико-математический лицей-интернат»

Сборник
дидактических заданий

Турнир
«Математический бой»

Математическая игра для 7 -10 классов



Сыктывкар 2013

Гагарина Н. Ю. – учитель математики ГАОУОШИ РК КРФМЛИ

Черняева В. И. – учитель математики ГАОУОШИ РК КРФМЛИ

Турнир «Математический бой»: сборник дидактических заданий.
Сборник адресован учителям, школьникам и может
быть интересен всем любителям математики.
Составители: Гагарина Н.Ю., Черняева В.И., учителя математики
ГАОУОШИ РК КРФМЛИ

Содержание

Предисловие

В нашем лицее много традиций. Одна из них - игра «Математический бой» для учащихся 7 – 10 классов. Это соревнование двух команд в решении нестандартных задач, в умении отвечать у доски и проверять чужие решения.

На олимпиаде лицеисты учатся оформлять свои мысли письменно, проверять себя, не надеясь на чью - то помощь, – это очень важно, но того, что дает математический бой, олимпиады заменить не могут.

Такого энтузиазма в решении трудных задач и такой мобилизации сил и способностей, как во время математического боя, нигде не увидишь.

На математических боях – полная самоорганизация, вся ответственность на самих ребятах, а результат осязаемый, зависящий от множества удач и просчетов, переживаемых у всех на глазах.

Такая форма внеклассной работы организует досуг учащихся, способствует сплочению коллектива. Математические бои формируют умение работать в коллективе, отстаивать свою точку зрения и развивают нетрадиционное мышление.

Сборник написан в форме задачника с решениями. В данный сборник включены материалы математических боев физико-математического лицея г. Сыктывкара за 2008-2011 учебные годы. Представлены также правила проведения боев, описана технология их проведения и указан список литературы, использованный при подготовке заданий к турниру.

Правила турнира «Математический бой»

Схема математического боя

Математический бой - это соревнование двух команд в решении нестандартных задач, подобранных жюри, в умении отвечать решения у доски и в умении проверять чужие решения.

Команды получают одинаковые задачи и решают их в разных помещениях заданное время, потом собираются вместе для проверки решений. Таким образом, математический бой состоит из двух частей: решения задач и собственно боя.

Чтобы определить, кто какую задачу будет отвечать, команды делают "вызовы": одна называет номер задачи, решение которой она хочет услышать, а другая сообщает, принят ли вызов. Обычно команды вызывают друг друга по очереди.

Если вызванная команда хочет отвечать, то она выставляет докладчика, а другая команда - оппонента для проверки решения. Командам могут даваться минутные перерывы для помощи докладчику или оппоненту.

Если решение задачи принято жюри, то переходят к обсуждению другой задачи, а если не принято, то см. "перемена ролей" и "корректность вызова".

Если вызванная команда отказалась отвечать, то вызывавшая команда должна сама рассказать решение задачи. При этом если оппонент докажет, что у докладчика нет решения, то вызов считается некорректным. Тогда вызывавшая команда должна повторить вызов.

Команда может отказаться делать очередной вызов (если у нее не осталось решенных задач, и она не хочет делать некорректный вызов). Тогда другая команда получает право рассказать решения любых задач, оставшихся не разобранными.

После каждого выступления жюри дает командам очки, как за доклад, так и за оппонирование.

Решение задач

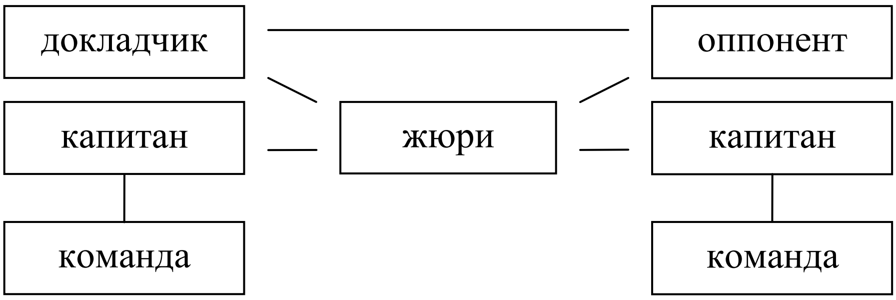
Есть джентльменское правило: прежде, чем решать задачи, команды сообщают жюри все задачи, решения которых им известны (математический бой - это не клуб знатоков). Жюри исключает или заменяет эти задачи (предварительно проверив, что идея решения действительно известна).

Представитель жюри регулярно посещает команды и отвечает на вопросы по условиям задач. При этом каждое уточнение условий, данное одной команде, сразу же должно сообщаться и другой команде.

Жюри не должно давать информации о трудности задач. В процессе решения задач и во время боя команды не должны общаться и знать количество решенных задач у соперников.

Ход боя

Когда время на решение задач истекло, команды и жюри собираются вместе. Существуют ограничения на общение участников, которые показаны на схеме (например, оппонент может общаться только с докладчиком и с жюри, а капитан - только со своей командой и с жюри).



Конкурс капитанов

Перед началом обсуждения необходимо определить, какая команда первой будет делать вызов. Для этого проводится Конкурс капитанов. Капитаны выходят к доске и получают достаточно простую задачу на сообразительность, в которой требуется дать только ответ, или игру, в которой не видно простой выигрышной стратегии (при этом капитанов спрашивают, кто хочет начать игру или быть вторым. Кто раньше ответит - определит очередность).

Конкурс кончается, когда один из капитанов даст ответ или победит в игре. Если ответ верен, то капитан победил, а если неверен, то победил другой капитан.

Капитан, победивший в конкурсе, сообщает, какая команда сделает первый вызов.

Вызов

Капитан вызывающей команды сообщает номер задачи, решение которой команда хочет услышать, а другая команда отвечает, принят ли вызов.

Если вызванная команда хочет отвечать, то она сообщает, что вызов принят и выставляет докладчика, а вызывавшая команда - оппонента для проверки решения.

Если вызванная команда отказалась отвечать, то вызывавшая команда должна сама предъявить решение (выставить докладчика, а другая команда - оппонента). В этом случае говорят, что происходит проверка корректности вызова.

Докладчик и оппонент

В идеале: сначала докладчик рассказывает решение, затем оппонент задает вопросы, после чего оппонент сообщает свое мнение о решении (например, "решение не принимается, т.к. такой-то факт не доказан, а на такой-то вопрос не получено удовлетворительного ответа"). И только после этого свои вопросы докладчику задает жюри.

В процессе доклада оппонент и жюри стремятся не прерывать докладчика и пользуются лишь выражениями типа: "это очевидно, можно не доказывать", "повторите, пожалуйста, этот момент".

Докладчик может не отвечать на вопросы оппонента во время доклада, но по требованию оппонента или жюри должен дать план решения.

Оппонент не должен требовать доказательства утверждений из школьной программы или круга "известных" фактов. В спорных случаях вопрос решает жюри.

Время на обдумывание вопросов у доски 1 минута (оппоненту - чтобы задать, докладчику - чтобы ответить).

Команды могут помогать докладчику и оппоненту только во время минутного перерыва (соперники тоже пользуются этой минутой). Во время своего минутного перерыва можно заменить докладчика или оппонента (при этом учитывается выход к доске).

Если за минуту, данную на обдумывание вопроса, который жюри считает существенным, докладчик не подготовил ответ, и команда не взяла минутный перерыв, то считается, что в решении есть пробел ("дырка").

Перемена ролей

Если в решении имеются "дырки", обнаруженные оппонентом, то, после того как жюри задаст докладчику свои вопросы, вызывавшая команда получает право (но не обязана) "залатать" эти "дырки" (но она не имеет права "залатывать" дыры, найденные не оппонентом, а жюри; тем более она не имеет права рассказывать свое решение). Происходит перемена ролей - теперь докладчик становится оппонентом, а оппонент - докладчиком. При этом "новый оппонент" (бывший докладчик) может получить очки за оппонирование, но повторной перемены ролей произойти не может.

Только в том случае, когда оппонент смог доказать, что у докладчика полностью отсутствует решение (и жюри согласно с этим), т.е. что имеется "дырка" размером в полное решение, вызывавшая команда получает право рассказывать свое решение - происходит перемена ролей.

Если оппонент не нашел пробелов и его команда не взяла минутный перерыв, то он и его команда в обсуждении задачи больше не участвуют.
Во время перемены ролей можно заменить бывших докладчика или оппонента (при этом учитывается выход к доске).

Корректность вызова

Если вызов принят, то вопроса о его корректности не ставится (иногда говорят: "принятый вызов всегда корректен").

Если вызов не принят, то вызывавшая команда должна сама рассказать решение, и здесь возможны два случая:

1. вызывавшая команда не стала отвечать. Тогда вызов "автоматически" считается некорректным;
2. вызывавшая команда выставила докладчика. Тогда происходит обычное обсуждение задачи докладчиком (от вызывавшей команды) и оппонентом (от вызванной) со следующими особенностями:

а) перемены ролей произойти не может, т.к. вызванная команда уже отказалась рассказывать решение;

б) решающее значение имеет ответ оппонента на традиционный вопрос жюри "принимается ли решение?". Если решение не принимается, то оппонент должен строго обосновать свои претензии к решению.

Вызов признается некорректным в двух случаях:

1. вызывавшая команда не стала отвечать;
2. вызывавшая команда выставила докладчика, но рассказала менее половины решения (т.е. не более чем на 6 баллов), и при этом оппонент не принял решения (если оппонент принял решение, не разглядев в нем "липу", то вызов считается корректным).

При некорректном вызове оппонент получает 6 очков, а вызывавшая команда - до 6 очков за верные идеи и должна повторить вызов.

Отказ делать вызов

Если у команды не осталось решенных задач, то она отказывается делать вызов (чтобы избежать некорректного вызова). Тогда другая команда получает право рассказать все оставшиеся у нее решения.

После отказа от вызова команда до конца боя теряет право рассказывать решения задач и становится "вечным оппонентом", т.е. может получать очки только за оппонирование.

Начисление очков

Каждая задача стоит 12 очков (чтобы не сообщать трудность задач). Эти очки распределяются между докладчиком, оппонентом и жюри (жюри достается остаток от 12 очков).

Очки даются как за положительный вклад в решение задачи, так и за нахождение ошибок и пробелов в решении. За чистое решение задачи дается 12 очков, а за "полное" оппонирование - 6 очков (если оппонент показал, что у докладчика совсем нет положительных результатов).

Сначала жюри определяет стоимость (в очках) рассказанной докладчиком части (он и получает эти очки) и стоимость каждой "дырки" в решении. За каждую найденную "дырку" оппонент получает половину стоимости этой "дырки" (если "дырку" нашло жюри, то оно и получает очки). Вторую половину стоимости этой "дырки" получит тот, кто ее "залатает" -докладчик (если ответит на вопрос оппонента), оппонент (при перемене ролей) или жюри (если никто "дырку" не закроет). При перемене ролей для подсчета очков применяют те же самые рассуждения.

Пример:

Докладчик рассказал решение. Оппонент нашел дырку - 1. Жюри задало вопросы докладчику и нашло еще две дырки: дырку - 2 и дырку - 3, причем дырку - 2 докладчик залатал у доски.

Жюри разделило очки так: рассказанная часть - 2 очка, дырка -1 - 6 очков, дырка - 2 - 2 очка, дырка - 3 - 2 очка.

Оппонент получил право рассказывать дырку -1 - т.е. произошла перемена ролей (стоит эта дырка 6 очков, 3 из которых уже получил оппонент; значит, сейчас разыгрывается 3 очка). При этом "новый оппонент" (бывший докладчик) нашел в его рассказе дырку - 4.

Жюри оценило так: рассказанная часть -1 очко (из 3), дырка - 4 - 2 очка (из 3).

Общий счет:

Докладчик: 2 (рассказанная часть) + 1 (половина стоимости дырки - 2 - т.к. он ее залатал у доски) + 1 (половина стоимости дырки - 4 - т.к. он ее нашел, находясь в роли оппонента) = 4 очка.

Оппонент: 3 (половина стоимости дырки - 1) + 1 (рассказанная им часть при перемене ролей) - 4 очка.

Жюри: оставшиеся 4 очка.

За красивое решение или красивое оппонирование жюри может дать одно премиальное очко (оно не входит в те 12 очков).

Жюри дает очки гласно, т.е. объясняет, за что они даны или сняты.

Жюри может оштрафовать команду на очко за шум, за неэтичное поведение (после предупреждения). За подсказку штраф может быть больше с прекращением дискуссии по задаче и удалением подсказавшего.

Если остается время, жюри может выслушать более красивые решения и давать за них премиальные очки.

Итоги

После каждого вызова жюри сообщает, поясняет и записывает, сколько очков получила каждая команда. Жюри ведет протокол математического боя в виде таблицы, в которой указываются: фамилии выступающих, номер обсуждаемой задачи, направление вызова, взятые минутные перерывы и. количество очков, полученных командами и оставшихся у жюри. На доске рисуется упрощенная таблица, без указания фамилий.

После боя очки у каждой команды и у жюри складываются (количество очков, оставшихся у жюри, характеризует трудность задач и силу команд).

Если разность очков команд не превышает трех, то засчитывается ничья.

Если остается время, то жюри рассказывает решения нерешенных во время математического боя задач или показывает более удачные решения.

Статус жюри

Жюри является верховным толкователем правил математического боя. Если ситуация правилами не предусмотрена, жюри принимает решение по своему усмотрению. Решение жюри являемся обязательным для команд.

Жюри может снять вопрос оппонента (если вопрос не по существу), прекратить доклад или оппонирование (если дискуссия затягивается). Во всех подобных случаях жюри обосновывает свое решение.

Всякие соображений по уже разобранным задачам жюри рассматривает после боя. Задним числом счет изменять нельзя.

Статус ведущего

Ведущий обязан следить за порядком обсуждения, в частности:

- предоставлять слово докладчику;
- объявлять о завершении доклада и переходе к обсуждению;
- объявлять начало и конец минутного перерыва, взятого командой;
- фиксировать вопросы оппонента и ответы на них докладчика (например, спрашивая оппонента: "Вы удовлетворены ответом?" и т.д.);
- фиксировать мнение оппонента о докладе ("Решение принимается?" или -если решение не принимается - "С чем Вы не согласны в решении?");
- объявлять о завершении обсуждения и переходе к заданию вопросов жюри докладчику;
- не позволять оппонентам перебивать докладчика;

– не позволять обсуждению выходить за рамки научной дискуссии;
– объявлять распределение очков за задачу, поясняя, за что они даны или сняты.

Статус капитана

Капитан отвечает перед командой за организацию решения задач, подготовку докладчиков и оппонентов, тактику ведения боя.

Капитан является представителем команды по всем организационным вопросам: только он делает вызов, берет минутный перерыв, общается с жюри (если капитан выходит к доске, то он оставляет заместителя).

Капитан заранее определяет, кто будет докладчиком и кто оппонентом по каждой задаче, решает взять или отдать первый вызов.

Договорные условия

1. Предельное число выходов к доске одного человека - 2 (не считая конкурса капитанов).
2. Число минутных перерывов - 3.
3. Примерное время на доклад (после которого жюри решает: дать еще время или передать слово оппоненту) - 10 минут (без учета времени ответов на вопросы оппонента).
4. Примерное время на дискуссию - 7 минут (без учета времени на рассказ решения докладчиком).
5. Какую разницу очков считать ничейной - 3.
6. Можно ли пользоваться литературой и калькуляторами во время решения задач - нет.
7. Можно ли выходить к доске с записанным решением - нет.

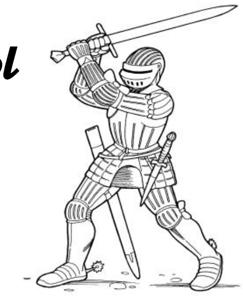
Памятка жюри

1. Жюри должно знать решения всех задач.
2. Жюри должно помнить, что своими вопросами оно помогает докладчику доработать решение у доски, а вмешиваясь в диалог, "ест хлеб" оппонента.
3. Если жюри (после вопросов оппонента) видит пробел в решении, то оно должно проверить, может ли докладчик его закрыть.
4. Сначала обсуждаются оргвыводы (наличие решения, «достаточность оппонирования и т.д.), затем обсуждаются очки.
5. Если докладчик несет полную чушь, то лучше всего попросить предъявить план решения -у "лапши" не бывает плана. Но это надо делать после вопросов оппонента - см. памятку 2.
6. Если жюри не может быстро разобраться в решении, то в целях экономии времени и сил участников с согласия капитанов жюри может выделить своего представителя, который пойдет

разбираться с докладчиком и оппонентом в другое помещение. При этом бой продолжается, а очки по задаче начисляются позднее. (Это возможно, если нет проверки корректности вызова).

7. Желательно в течение боя в аналогичных ситуациях принимать аналогичные решения (правило прецедента).

Турнирная таблица игры «Математический бой» Старт-лига



Премьер-лига

Четверть - финал

Полуфинал

Финал

Государственное автономное общеобразовательное учреждение
общеобразовательная школа-интернат Республики Коми
«Коми республиканский физико-математический лицей-интернат »

ПРОТОКОЛ
игры «Математический бой»

между командами ______________ классов

Дата проведения игры «____» _________________ 201___г.

Ведущий _____________________________/__________________________

Члены жюри:
1.____/____________
2.____/____________
3.____/____________

Состав команды _______ класса

1. ______________________ (капитан)
2. ______________________
3. ______________________
4. ______________________
5. ______________________
6. ______________________

Состав команды _______ класса

1. ______________________ (капитан)
2. ______________________
3. ______________________
4. ______________________
5. ______________________
6. ______________________

Результаты игры:

№	Ф.И. участника	баллы	вызов	баллы	Ф.И. участника	Жюри
1.						
2.						
3.						
4.						
5.						
6.						

Итог боя: ____

Председатель жюри
____________________/_________________/__________________

Капитан команды _______ класса ____________ /______________

Капитан команды _______ класса _____________ /_____________

2008-2009 учебный год

Старт – лига
I отборочный тур

1. Два автобуса одновременно выехали из пунктов A и B навстречу друг другу. Через 7 часов расстояние между ними оказалось 136 км. Найдите расстояние между A и B, если весь путь от A до B один автобус может проехать за 12 часов, а другой за 10 часов.
2. Найдите четырехзначное число, первая цифра которого равна количеству нулей в данном числе, вторая цифра количеству единиц, третья цифра – количеству двоек, а четвертая цифра – количеству троек. Сколько решений имеет задача?
3. На прямой последовательно отмечены 100 точек A_1, A_2, A_3,…, A_{100} так, что $A_1A_2 = 1$, $A_2A_3 = 2$, $A_3A_4 = 3$, … , $A_{99}A_{100} = 99$. Укажите отрезки с концами в указанных точках имеющих длину 21.
4. Три друга спортсмена – Алеша, Вася и Сережа – учатся в одном классе. Каждый из них увлекается двумя видами спорта из следующих шести: футбол, волейбол, баскетбол, теннис, плаванье и велоспорт. Все трое – Сережа, теннисист и пловец – ходят из школы вместе. Пловец и футболист – соседи по дому. Алеша – самый младший из троих, а теннисист старше велосипедиста. Наиболее интересные спортивные передачи по телевидению все трое – Алеша, волейболист и велосипедист – смотрят вместе. Кто каким видом спорта занимается?
5. Есть 6 монет, из которых две – фальшивые, весящие меньше настоящих. Как за три взвешивания на чашечных весах без гирь найти эти монеты?
6. Можно ли в клетках квадратной таблицы 8 x 8 расставить числа -1, 0, 1 так, чтобы все суммы – в каждом столбце, в каждой строке и на каждой из двух диагоналей – были различны.

Ответы и решения.

1. **Ответ:** 480 км.

   Решение: За один час оба автобуса проезжают вместе $\frac{1}{12}+\frac{1}{10}=\frac{11}{60}$ расстояния от A до B, а за 7 часов - $\frac{77}{60}$ этого расстояния. Следовательно, они проехали вместе весь путь от A до B и еще

$\frac{17}{60}$ пути, что составляет 136 км. Тогда расстояние от A до B ровно $136 : \frac{17}{60} = 480$ км.

2. **Ответ:** 1210, 2020.

   Решение: Очевидно, что если такое число есть, то все его цифры меньше 4. Допустим далее, что в числе имеется цифра 3. Если 3 – первая цифра числа, то все остальные его цифры равны нулю. Получаем противоречие, так как 4-я цифра этого числа не должна равняться нулю. Аналогичное противоречие получается и в тех случаях, когда 3 стоит на 2-м, 3-м и 4-м местах этого числа. Итак, все цифры этого числа меньше 3.

   Пусть 1-я цифра числа равна 2. Тогда в числе 2 нуля. Учитывая, что цифра десятков числа не равна нулю (в числе имеется цифра 2), получим, что цифры сотен и единиц равны нулю. Единственное решение в этом случае – 2020. Аналогично разбирается случай, когда число начинается с 1.

3. **Ответ:** A_1A_7, A_6A_9, $A_{10}A_{12}$, $A_{21}A_{22}$.

   Решение: Задача сводится к следующей: подряд выписаны числа 1, 2, 3, 4, 5, … , 99. Надо выбрать из этих чисел несколько последовательных чисел так, чтобы их сумма была равной 21. Выпишем все числа от 1 до 21 (дальше писать не имеет смысла): 1, 2, 3, … , 21.

   1) 1+ 2+ 3+ 4+ 5+ 6 = 21 A_1A_7 имеет длину 21.
   2) 6+ 7+ 8 = 21 A_6A_9 имеет длину 21.
   3) 10+ 11 = 21 $A_{10}A_{12}$ имеет длину 21.
   4) 21 $A_{21}A_{22}$ имеет длину 21.

4. **Ответ:** Сережа посещает секции по футболу и велоспорту;
   Алёша – по баскетболу и плаванью;
   Вася – по волейболу и теннису.

   Решение: Так как все трое – Сережа, теннисист и пловец – ходят из школы вместе, поэтому
   а) Сережа не теннисист и не пловец;
   б) теннисист и пловец – два разных человека.

   Так как Алеша самый младший из троих, а теннисист старше велосипедиста, получаем, что
   а) Алеша не теннисист и не велосипедист;
   б) теннисист и велосипедист – два разных человека.

Так как наиболее интересные спортивные передачи по телевидению все трое – Алёша, волейболист и велосипедист – смотрят вместе, тогда

а) Алеша не волейболист и не велосипедист;

б) волейболист и велосипедист – два разных человека.

Теперь на основе этих выводов рассмотрим следующую таблицу:

	футбол	волейбол	баскетбол	теннис	плаванье	велоспорт
Алёша	-	-	+	-	+	-
Вася	-	+	-	+	-	-
Серёжа	+	-	-	-	-	+

5. **Решение:** Разделим монеты на две группы по 3 монеты в каждой и сравниваем их веса. Возможны случаи:
    1) весы в равновесии. Тогда на каждой чашке по фальшивой монете. Далее берем две монеты с одной чашки и сравниваем их. Если весы в равновесии, то фальшивая – третья монета на этой чашке. Если же весы не в равновесии, , то фальшивая – более легкая монета. Аналогичным образом третьим взвешиванием находиться фальшивая монета на другой чашке весов.
    2) Весы не в равновесии. Тогда обе фальшивые монеты в более легкой тройке монет. Вторым взвешиванием сравниваем две монеты из этой группы. Если весы в равновесии, то выбранные монеты фальшивые. Если же весы не в равновесии, то фальшивыми будут более легкая монета и третья монета с этой чашки весов. Таким образом, требуется всего два взвешивания

6. **Ответ:** Нельзя.
   Решение: Так как в клетках таблицы расставляются числа 0, 1, - 1, то каждая из сумм принимает значение от – 8 до + 8 (всего 17 значений). С другой стороны, количество всех сумм равно 18 (8 строк, 8 столбцов и 2 диагонали). Следовательно, хотя бы две какие-то суммы принимают одинаковое значение.

Старт – лига
II отборочный тур

1. Три брата возвращались с совместной рыбалки домой, где их ожидал бочонок холодного кваса. Старший брат шел втрое медленнее младшего и вдвое медленнее среднего. Придя домой, младший сразу принялся за бочонок и выпил 7-ю его часть к

приходу среднего брата, который присоединился к младшему и стал поглощать квас с такой же скоростью. Досталось ли кваса старшему брату?

2. Натуральное число А оканчивается цифрой 8. После перестановки этой цифры в начало числа А получается число в 8 раз больше, чем число А. Найдите наименьшее из таких чисел А.
3. Двое по очереди пишут цифры 20-значного числа: первый пишет цифру единиц, второй - цифру десятков, затем первый цифру сотен, второй – цифру тысяч и т.д. Может ли второй игрок добиться, чтобы полученное 20-значное число делилось на 9?
4. В комнате собрались 4 человека: рыцари и лжецы. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Один из собравшихся сказал: «Здесь нет ни одного рыцаря». Второй сказал: «Здесь не больше одного рыцаря». Третий сказал: «Здесь не больше двух рыцарей», а четвертый сказал: «Здесь не больше трех рыцарей». Сколько в комнате рыцарей?
5. Докажите, что первые 16 натуральных чисел можно записать в строку так, что сумма любых двух соседних чисел была квадратом натурального числа. Можно ли записать таким же образом эти числа по кругу?
6. Из стальной пластины вырезали шаблон угла в 19°. С помощью этого шаблона на листе бумаги можно строить углы, обводя его карандашом, например, 19°, 38° и т.д. Как с помощью этого шаблона построить угол в 1°?

Ответы и решения.

1. **Ответ:** Старшему брату кваса не досталось.
   Решение: Пусть t_1 - время затраченное на весь путь младшим братом, t_2 - средним братом, t_3 часа – старшим братом. По условию задачи $t_3 = 3t_1$, $t_3 = 2t_2$, тогда $3t_1 = 2t_2$, т.е. $t_2 = \frac{3}{2}t_1$. После рыбалки через t_1 часов младший пришел домой, через $\frac{1}{2}t_1$ часов после этого средний пришел домой. Пусть было V литров кваса, тогда за $\frac{1}{2}t_1$ часов младший выпил $\frac{1}{7}V$ литров кваса, за $\frac{3}{2}t_1$ часов младший и средний выпили по $\frac{3}{7}V$ литров, т.е. вместе выпили $\frac{6}{7}V$. Тогда к приходу старшего было выпито $\frac{1}{7}V + \frac{6}{7}V = V$ литров кваса, т.е. старшему ничего не осталось.

2. **Ответ:** 1 012 658 227 848.

Решение: Число А по условию заканчивается цифрой 8. Если умножить А на 8, то полученное произведение будет заканчиваться цифрой 4. Следовательно, цифра десятков числа А равна 4, и число А заканчивается цифрами 48. В этом случае произведение 8А заканчивается двузначным числом 84, следовательно, цифра сотен числа А равна 8. Дальнейшее ясно: необходимо продолжить эту цепочку вычислений, в результате чего получим А.

3. **Ответ:** Может.

Решение: На каждую записанную первым игроком цифру второй игрок пишет такую цифру, чтобы сумма этих двух цифр делилась на 9. Например, если 1-й игрок записал 4, то 2-й пишет 5, если 1-й записал 9, то второй пишет 9 и т.д.

4. **Ответ:** 2 рыцаря.

Решение: Если первый человек – рыцарь, то он противоречит самому себе, следовательно, первый человек – лжец. Если второй человек – рыцарь, то все остальные люди – лжецы. Поэтому, когда третий человек говорит, что в комнате не более двух рыцарей, то он, будучи лжецом, говорит неправду и, следовательно, в комнате более двух рыцарей. Это противоречие! Итак, второй человек – лжец.

Допустим далее, что третий человек тоже лжец. Тогда в комнате более двух рыцарей, но этого уже не может быть, так первые два человека – лжецы. Следовательно, третий человек – рыцарь. Аналогично получим, что и четвертый человек в комнате тоже рыцарь.

5. **Ответ:** 8, 1, 15, 10, 6, 3, 13, 12, 4, 5, 11, 14, 2, 7, 9, 16.

Решение: Рассмотрим числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, …, 16.

Сумма двух соседних чисел не превышает 31, т.е. могут получиться следующие квадраты: 4,9, 16, 25.

Число 1 создает квадрат в сумме с числами 3, 8, 15.

2 – с числами 7, 14;
3 – с числами 1, 6, 13;
4 – с числами 5, 12;
5 – с числами 4, 11;
6 – с числами 3, 10;
7 – с числами 2, 9;
8 – с числами 1;
9 – с числами 7, 16;
10 – с числами 6,15;
11 – с числами 5, 14;
12 – с числами 4, 13;
13 – с числами 3, 12;
14 – с числами 2, 11;
15 – с числами 1,10;
16 – с числами 9.

Т.к. число 8 создает квадрат только с числом 1, то поставим его на I место. Искомый ряд выглядит так 8, 1, 15, 10, 6, 3, 13, 12, 4, 5, 11, 14, 2, 7, 9, 16.

По кругу числа нельзя записать, т.к. число 8 (или16) создает квадрат только с одним числом, а в круге оно должно создавать квадрат с двумя числами.

6. **Решение:** $1^0 = 19 \cdot 19^0 - 360^0$. Откладываем шаблон 19 раз от некоторой прямой.

Четверть - финал
I вариант

1. Положительные числа a, b, p, q таковы, что $p + q = 1$ и $\frac{p}{a} + \frac{q}{b} = \frac{1}{pa + qb}$. Докажите, что $a = b$.
2. В городе Глупове каждый житель – полицейский, вор или обыватель. Полицейские всегда врут обывателям, воры полицейским, обыватели – ворам, а во всех остальных случаях жители Глупова говорят правду. Однажды, когда несколько глуповцев водили хоровод, каждый сказал своему правому соседу: «Я полицейский». Сколько в этом хороводе было обывателей?
3. Сто спортсменов выстроены в шеренгу. Каждый из них одет в красный или синий спортивный костюм. При этом, если спортсмен одет в красный костюм, то спортсмен, стоящий через 10 человек от него (для первого, например, - это двенадцатый: между ними 10 спортсменов) одет в синий костюм. Докажите, что в красные костюмы одето не более 55 спортсменов.
4. Две команды участвовали в финале конкурса, состоящем из 12 заданий. За выигрыш команда получала 3 балла, за ничью 2 балла, за проигрыш 1 балл. В результате одна из команд получила 27 баллов. Выиграла данный конкурс эта команда или нет?
5. Найдите наименьшее натуральное число, которое начинается с цифр 1997 и делится на все числа от 1 до 9.
6. На какое наименьшее число частей, не обязательно равных, надо разделить торт, чтобы можно было раздать весь торт поровну, как троим, так и четверым гостям?

Ответы и решения.

1. **Решение:**

$\frac{p}{a}+\frac{q}{b}=\frac{1}{pa+qb}=\frac{p+q}{pa+qb}$, т.к. $1=p+q$ (по условию)

$\frac{p}{a}+\frac{q}{b}-\frac{p}{pa+qb}-\frac{q}{pa+qb}=0$, $p\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{pa+qb}\right)+q\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{pa+qb}\right)=0$

$p\frac{pa+qb-a}{a(pa+qb)}+q\frac{pa+qb-b}{b(pa+qb)}=0$ $\left|\begin{array}{l} pa-a=a(p-1)=-aq \\ qb-b=b(q-1)=-bp \end{array}\right.$

$p\frac{qb-aq}{a(pa+qb)}+q\frac{pa-bp}{b(pa+qb)}=0$ $p\frac{q(b-a)}{a(pa+qb)}+q\frac{p(a-b)}{b(pa+qb)}=0$. Складывая, получим: $\frac{pq(b-a)^2}{ab(pa+qb)}=0$, откуда $b=a$.

2. **Ответ:** Обывателей в хороводе не было.

   Решение: Заметим, что правый сосед вора, которому этот вор врет – обязательно полицейский, а правый сосед полицейского, которому этот полицейский говорит правду – вор или полицейский. Получается, что если в хороводе есть хотя бы один вор или полицейский, то обывателей в этом хороводе нет. Из одних обывателей хоровод состоять не может, ибо тогда они лгали бы друг другу. Значит, обывателей в хороводе не было.

3. **Решение:** Разобьем спортсменов на пять групп по двадцать два человека (с 1 по 22, с 23 по 44, с 45 по 66, с 67 по 88, с 89 по 100). Первые 4 группы одинаковы и в каждой из них не более 11 красных костюмов. В последней группе 12 человек, и так же не более 11 красных костюмов. Отсюда, всего не более $11\cdot 5=55$ красных костюмов.

4. **Решение:** Пусть первая команда выиграла к заданий, сделала n ничьих и проиграла $12-\kappa-n$ заданий. Тогда она набрала $3k+2n+(12-k-n)=12+2k+n$ баллов. При этом вторая команда набрала $3(12-k-n)+2n+k=36-2k-n$ баллов. Имеем: $12+2k+n=27$, откуда $2k+n=15$. В этом случае у второй команды $36-15=21$ балл. Т.е. первая команда выиграла.

5. **Ответ:** 19971000.

6. **Решение:** Возьмем отрезок длины 12 и разделим его сначала на 3 равные части, потом на 4 равные части. В этом случае получим

кусочки длины $\frac{3}{12}$; $\frac{1}{12}$; $\frac{2}{12}$; $\frac{2}{12}$; $\frac{1}{12}$;$\frac{3}{12}$. Ясно, что, имея эти кусочки, можно дать одно и то же количество торта как трем, так и четырем гостям.

Четверть – финал
II вариант

1. Среди 25 монет одна фальшивая, отличающаяся по весу от настоящей. Как за 2 взвешивания на чашечных весах без гирь определить, тяжелее или легче она настоящей монеты?
2. В городе Глупове каждый житель – полицейский, вор или обыватель. Полицейские всегда врут обывателям, воры полицейским, обыватели – ворам, а во всех остальных случаях жители Глупова говорят правду. Однажды, когда несколько глуповцев водили хоровод, каждый сказал своему правому соседу: «Я полицейский». Сколько в этом хороводе было обывателей?
3. Последовательность чисел строится по следующему правилу. На первом месте – число 7, далее за каждым числом стоит сумма цифр его квадратов увеличенная на 1.
   Так на втором месте 14, т.к. $7^2 = 49$, а 4+9 – сумма цифр, увеличенная на 1 дает 14., далее
   $14^2 = 196$, а $(1 + 9 + 6) + 1 = 17$. На третьем месте 17 и т.д. Какое число стоит на 1000 месте?
4. Фигура «верблюд» ходит по доске 10 х 10 ходом типа (1;3), т.е. она сдвигается сначала на соседнее поле, а затем сдвигается еще на 3 поля в перпендикулярном направлении (конь, например, ходит ходом типа (1;2)).
   Можно ли пройти ходом «верблюда» с какого-то исходного поля на соседнее с ним?
5. На доске написано n минусов. Двое по очереди переправляют 1 или 2 соседних минуса на плюсы. Выигравшим считается тот, кто переправляет последний минус. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его соперник?
   Рассмотреть случаи: а) $n = 99$; б) $n = 100$.
6. Сто спортсменов выстроены в шеренгу. Каждый из них одет в красный или синий спортивный костюм. При этом, если спортсмен одет в красный костюм, то спортсмен стоящий через 10 человек от него (для первого, например, - это двенадцатый: между ними 10 спортсменов) одет в синий костюм. Докажите, что в красные костюмы одето не более 55 спортсменов.

Ответы и решения.

1. **Решение:** Разделим 25 монет на 5 кучек по 5 монет в каждой. Первым взвешиванием на 1 чашку весов 2 кучки по 5 монет, на другую чашку так же 2 кучки по 5 монет.
   Если весы в равновесии, то фальшивая монета в последней пятой кучке, и вторым взвешиванием мы определяем легче или тяжелее она настоящей, сравнивая эту кучку с пятью монетами любой из первых четырех кучек.
   Пусть теперь весы не в равновесии. Берем 5 монет с более легкой чашки еще 5 монет с этой же чашки и сравниваем их вес. Если весы в равновесии, то эти 10 монет настоящие и фальшивая была тяжелее. Если весы не в равновесии, то фальшивая монета легче настоящей.

2. **Ответ:** Обывателей в хороводе не было.
   Решение: Заметим, что правый сосед вора, которому этот вор врет – обязательно полицейский, а правый сосед полицейского, которому этот полицейский говорит правду – вор или полицейский. Получается, что если в хороводе есть хотя бы один вор или полицейский, то обывателей в этом хороводе нет. Из одних обывателей хоровод состоять не может, ибо тогда они лгали бы друг другу. Значит, обывателей в хороводе не было.

3. **Ответ:** 11
   Решение: 7, 14, 17,20, …
   1). $7^2=49$ Сумма цифр увеличенная на 1: $(4+9)+1=14$
   2). $14^2=196$ Сумма цифр увеличенная на 1: $16+1=17$
   3). $17^2=289$ Сумма цифр увеличенная на 1: $(2+8+9)+1=20$
   4). $20^2=400$ Сумма цифр увеличенная на 1: $(4+0+0)+1=5$
   5). $5^2=25$ Сумма цифр увеличенная на 1: $(2+5)+1=8$
   6). $8^2=64$ Сумма цифр увеличенная на 1: $(6+4)+1=11$
   7). $11^2=121$ Сумма цифр увеличенная на 1: $(1+2+1)+1=5$
   8). $5^2=25$ Сумма цифр увеличенная на 1: $(2+5)+1=8$
   9). $8^2=64$ Сумма цифр увеличенная на 1: $(6+4)+1=11\ldots$
   Итак, первые 4 числа больше не встречаются, следовательно, 1000 – 4 = 996 мест остается для остальных чисел. Разбиваем на тройки 996 : 3 = 332, следовательно, 332 тройки, значит на 1000 месте 11.

4. **Ответ:** Нельзя.

Решение: Рассмотрим шахматную раскраску доски. Тогда, как легко проверить, каждым своим ходом «верблюд» ходит с одного поля на поле того же цвета. Но т.к. два соседних поля имеют разную окраску, то пройти с одного на другое ходом «верблюда» невозможно.

5. **Решение:**
   а) При n = 99 начинающему следует первым своим ходом переправить на плюс центральный минус, а затем ответить на каждый ход противника ходом, симметричным от центра цепочки. Выигрывает начинающий.
   б) При n = 100 так же выигрывает начинающий; ему нужно первым ходом переправить два центральных минуса на плюсы, а дальше отвечать на ход второго игрока ходом симметричным относительно центра цепочки.

6. **Решение:** Разобьем спортсменов на пять групп по двадцать два человека (с 1 по 22, с 23 по 44, с 45 по 66, с 67 по 88, с 89 по 100). Первые 4 группы одинаковы и в каждой из них не более 11 красных костюмов. В последней группе 12 человек, и так же не более 11 красных костюмов. Отсюда, всего не более $11\cdot 5=55$ красных костюмов.

Полуфинал

1. За круглым столом сидят 12 человек, рыцари и лжецы (рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут). Каждый из них сказал: «Среди моих соседей один рыцарь и один лжец». Сколько рыцарей и сколько лжецов сидит за столом?
2. Определите число студентов сдававших экзамен по математике, если известно, что шестая часть из них получили оценку «3», 55% получили оценку «4», а 14 человек получили оценку «5», причем эти студенты составляют более 4%, но менее 5% от искомого числа студентов. Найдите так же, сколько студентов получили оценку «2».
3. В четырехугольнике ABCD сумма углов ABD и BDC равняется 180°, а стороны AD и BC равны. Докажите, что углы при вершинах A и C такого четырехугольника равны.
4. Пятизначное число, в записи которого нет нулей, делится на 54. Из него вычеркнули одну цифру, и получилось четырехзначное число, делящееся на 54. Из этого четырехзначного числа тоже вычеркнули одну цифру – получилось трехзначное число, делящееся на 54. Наконец после вычеркивания еще одной цифры, получилось число 54. Найдите исходное число.

5. Можно ли расставить по кругу натуральные числа от 1 до 10 таким образом, чтобы сумма любых двух чисел, стоящих через одно, делится на 3? Не забудьте обосновать ответ.
6. Можно ли вписать в каждую клетку таблицы размером 4 х 6 по натуральному числу так, чтобы все числа были различны, каждое было не больше 30, и любые два числа, стоящие в клетках с общей стороной, имели общий делитель, больший 1?

Ответы и решения.

1. **Решение:**

   Первый случай – за столом нет рыцарей. Тогда все 12 человек – лжецы.

   Второй случай – за столом есть хотя бы один рыцарь. Тогда легко доказать, что расположение рыцарей и лжецов такое: $р р л р р л р р л р р л$.

2. **Ответ: 300 и 71**.

   Решение: Пусть x – общее число студентов. Тогда x делится на 6, т.к. $\frac{1}{6}$ часть студентов получили оценку «3», и x делится на 20, т.к. 55% = $\frac{11}{20}$ всех студентов получили оценку «4». Следовательно, x делится на 60. (НОК (6; 20) = 60). Так как 14 человек составляют более 4%, но менее 5% от общего числа студентов, то $0{,}04x < 14 < 0{,}05x$ т.е. $\begin{cases} 4x < 1400 \\ 5x > 1400 \end{cases}$ $\begin{cases} x < 350 \\ x > 280 \end{cases}$.

   Учитывая, что x делится на 60, получим x = 300. Следовательно, оценку «3» получили $\frac{1}{6} \cdot 300 = 50$ человек, оценку «4» получили $\frac{11}{20} \cdot 300 = 165$ человек, тогда оценку «2» получили $300 - (165 + 50 + 14) = 71$ человек.

3. **Решение:** Разрежем четырехугольник по диагонали BD и, перевернув треугольник BCD, вновь приложим его к диагонали BD. Получится равнобедренный треугольник ACD (AD = BC), поэтому угол A равен углу C.

4. **Ответ:** Исходное число – 59994.

   Решение: Так как до и после каждого из вычеркиваний число делилось на 9, то и сумма цифр числа в каждый из этих моментов делилась на 9. Поэтому вычеркивалась каждый раз девятка. Среди чисел 549, 594, 954 только 594 делится на 54, значит, перед последним вычеркиваем число было равно 594. Среди чисел 9594, 5994, 5949 на 54 делится только 5994, значит, после первого вычеркивания число было равно 5994. Наконец, среди чисел 95994, 59994, 59949 на 54 делится только 59994. Это и есть исходное число.

5. **Ответ:** Так расставить числа нельзя.
Решение 1: Допустим, что нам удалось расставить числа. Где – то на окружности стоит число 3. Пусть a – число, стоящее через один от тройки по часовой стрелке. Тогда a + 3 по условию должно делиться на 3, значит, a делится на 3. Пусть b – число, стоящее через 1 от a по часовой стрелке. По условию, a + b делится на 3. Значит, b делится на 3. Сдвигаясь еще через одно число по часовой стрелке, мы аналогично найдем еще одно (уже четвертое) число, кратное трем. Но этого не может быть: среди чисел от 1 до 10 только три числа делятся на 3.
Решение 2: Допустим, что нам удалось расставить числа требуемым образом. Для каждого числа, стоящего на окружности вычислим сумму этого числа и числа, стоящего через один от него по часовой стрелке. Мы получим 10 сумм, каждая из которых делится на 3. Сложим эти суммы, результат так же будет делиться на 3. С другой стороны, полученный результат равен удвоенной сумме всех чисел, так как каждое число на окружности дважды учитывалось нами при подсчете этой суммы сумм – один раз в качестве числа, «стоящего на окружности», а другой – в качестве числа, «стоящего через один». Значит, сумма всех чисел должна делиться на 3. Но это не верно, поскольку сумма чисел от 1 до 10 равна 55.

6. **Ответ:** Нельзя.
Решение: Каждая клетка в таблице граничит по сторонам самое меньшее с двумя другими. Поэтому числа 1, 17, 19, 23, 29, 11 и 13 для таблицы не годятся: первые пять из них вообще не имеют среди чисел от 1 до 30 возможных соседей, а последние два имеют лишь по одному возможному соседу (22 для 11 и 26 для 13). Остаются 23 числа, а в таблице 24 клетки.

Финал

1. Каблук Марьи Ивановны может сломаться, если она идет со скоростью более 4,5 км/ч. Сегодня Марья Ивановна вышла из дома со скоростью 5 км/ч. Когда ей осталось пройти втрое больше, чем она уже прошла, Марья Ивановна решила, что опаздывает на урок, и увеличила скорость до 6 км/ч. Но как только она прошла 40% оставшегося пути, у нее сломался каблук, и ей пришлось пройти оставшийся путь вдвое медленнее. Могла ли Марья Ивановна попасть в школу раньше, чем пришла, и с заведомо целым каблуком?
2. Укажите момент времени, когда впервые после полуночи угол между минутной и часовой стрелками будет равным $1°$, при том, что минутная стрелка показывает целое число минут.
3. В треугольнике проведены из одной вершины высота, из другой – медиана, из третьей – биссектриса. Высота разделила противолежащую сторону на отрезки 1 см и 49 см, медиана разделила противолежащую сторону на отрезки 25 см и 25 см. Каковы длины отрезков, на которые биссектриса разделила противолежащую сторону?
4. Есть 5 монет, из которых три настоящих, одна – фальшивая, которая весит больше настоящей, и одна – фальшивая, которая весит меньше настоящей. За три взвешивания определите обе фальшивые монеты
5. Вычислить сумму $a^{2009}+\frac{1}{a^{2009}}$, если $a^2-a+1=0$
6. В каждую клетку квадратной таблицы размера n×n (n – нечетное число) вписано одно из чисел +1 или -1. Под каждым столбцом пишется произведение всех чисел, стоящих в нем; справа от каждой строки пишется произведение всех чисел всех чисел, в ней стоящих. Доказать, что сумма всех 2n произведений не равна нулю.

Ответы и решения.

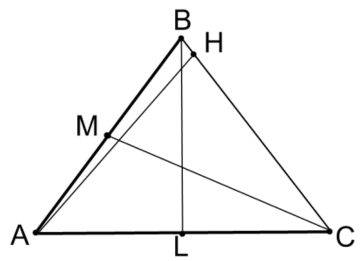
1. **Ответ:** Могла.

   Решение: Пусть от дома Марьи Ивановны до школы a км. Со скоростью 5 км/ч она шла, как легко понять, четверть всего пути, потратив на это $\left(\frac{a}{4}\right):5=\frac{a}{20}\textit{ч.}$ Со скоростью 6 км/ч она прошла 40% от оставшихся $\frac{3}{4}$ пути, то есть $0{,}4\cdot\left(\frac{3a}{4}\right)=\frac{3a}{10}$км. И потратила на это $\left(\frac{3a}{10}\right):6=\frac{a}{20}\textit{ч.}$ Наконец, оставшиеся после этого

$a-\frac{a}{4}-\frac{3a}{10}=\frac{9a}{20}$ км она шла со скоростью 3 км/ч и прошла их за $\left(\frac{9a}{20}\right):3=\frac{3a}{20}ч.$ Получается, что на весь путь Марья Ивановна потратила $\frac{a}{20}+\frac{a}{20}+\frac{3a}{20}=\frac{a}{4}ч.$ А если бы она весь путь шла с наибольшей «безопасной» скоростью, то прошла бы его за $\frac{a}{4{,}5}ч.$, то есть быстрее.

2. **Ответ:** 4 часа 22 минуты.
   Решение: Пусть в ***x*** час *y* минут угол между часовой и минутной стрелкой составляет 1°. По условию, ***y*** – натуральное (целое положительное) число (***x*** – целое число по смыслу задачи). За ***x*** часов часовая стрелка повернется на угол 30***x*** (в градусах), а за ***y*** минут еще на $\left(\frac{y}{2}\right)^{\mathrm{O}}$ (за 1 минуту часовая стрелка повернется на $\frac{1}{2}^{\mathrm{O}}$). Минутная стрелка за ***y*** минут повернется на (6y)°.
   Поскольку минутная стрелка может «обогнать» часовую или, наоборот, отстать от нее на 1°, получаем уравнение: $\left|30x+\frac{y}{2}-6y\right|=1$ или $60x-11y=\pm 2$.
   Требуется найти наименьшее значение ***x***, удовлетворяющее этому уравнению. При ***x*** = 1, 2, 3 целых значений ***y***, удовлетворяющих уравнению, нет, а при $x=4$ получается $y=22$.

3. **Ответ:** 35 см и 35 см; или 5 см и 5 см.
   Решение: Пусть в треугольнике ABC AH-высота, CM-медиана, BL-биссектриса. Так как AB = BC = 50, ΔABC равнобедренный, следовательно BL – биссектриса и медиана.



   1 случай: Пусть AC = *x*, MC = 49, BH = 1 из ΔAHC: $AH^2=x^2-49^2$ и из ΔABH: $AH^2=50^2-1^2$, следовательно $x^2-49^2=50^2-1^2$ $x=70$, $AL=LC=35$
   2 случай: Пусть AC = *x*, CH = 1, BH = 49
   Аналогично получаем $x^2-1^2=50^2-49^2, x=10$, $AL=LC=5$.

4. **Решение:** Рассмотрим монеты 1,2, 3, 4, 5. Сравниваем монеты 1 и 2. Если весы в равновесии, то это настоящие монеты, Оставляем

на одной чашке монету №1 и кладем поочередно монеты №3 и №4. Находим фальшивые. Пусть теперь №1 > №2. Вторым взвешиванием сравниваем №3 и №4. Если они находятся в равновесии, то это настоящие монеты. Третьим взвешиванием сравниваем №4 и №5. Если получилось равновесие, то фальшивые монеты №1 и №2. Если №4 > №5, то фальшивые монеты - №5 и №1. Если №4 < №5, то фальшивые монеты - это №5 и №2. Пусть №1 > №2 и №3 > №4. Тогда №5 – настоящая. Сравниваем ее с №4 и т.д.

5. **Ответ:** 1

Решение: Так как $a \neq 0$, то, разделив обе части уравнения $a^2 - a + 1 = 0$ на а, получим: $a - 1 + \frac{1}{a} = 0$. Откуда следует, что $a + \frac{1}{a} = 1$. Но $a^3 + 1 = (a+1)(a^2 - a + 1)$. Так как $a^2 - a + 1 = 0$, то $a^3 + 1 = 0$. Таким образом, $a^3 = -1$. Тогда

$$a^{2009} + \frac{1}{a^{2009}} = (a^3)^{669} \cdot a^2 + \frac{1}{(a^3)^{669} \cdot a^2} = (-1)^{669} \cdot a^2 + \frac{1}{(-1)^{669} \cdot a^2} =$$

$$= -a^2 - \frac{1}{a^2} = -(a^2 + \frac{1}{a^2}) = -\left((a + \frac{1}{a})^2 - 2\right) = -(1 - 2) = 1.$$

6. **Решение:** Так как произведение всех чисел по строкам и произведение по столбцам равны произведению всех чисел в таблице, то произведения по строкам и по столбцам равны между собой. Поэтому произведение всех произведений по строкам и по столбцам равно 1 и количество -1 среди этих произведений четно, а значит, не равно n. Поэтому количества произведений, равных 1 и -1, различны, а их сумма не равна нулю.

2009-2010 учебный год

Старт – лига

I отборочный тур

1. Федоту выставили годовые оценки по 12 предметам. Его средний балл оказался равным 3,5. По скольким предметам ему надо повысить оценки на 1 балл, чтобы средний балл стал равен 4.
2. Кузнечик прыгает по прямой линии, идущей с запада на восток. Первый его прыжок – на 1 метр, а каждый следующий – вдвое длиннее предыдущего. Направление каждого прыжка (на восток или на запад) кузнечик выбирает сам. Сможет ли он через несколько прыжков оказаться ровно на 35 метров восточнее исходной точки? Если да – как, если нет – почему?
3. Три богини пришли к юному Парису, чтобы тот решил, кто из них прекраснее. Афродита: «Я самая прекрасная». Афина: «Афродита не самая прекрасная». Гера: «Я самая прекрасная». Афродита: «Гера не самая прекрасная». Афина: «Я самая прекрасная». Все утверждения прекраснейшей из богинь истинны, а все утверждения остальных богинь ложны. Определите прекраснейшую из богинь.
4. Углы AOB, BOC и COD равны между собой, а угол AOD втрое меньше каждого из них. Найдите величину угла AOD (перечислите все возможные варианты).
5. Треть книжной полки занимают книги толщиной 12 мм, другую треть книги толщиной 15 мм и последнюю треть книги толщиной 18 мм. Все книги разные. Олег, читая по одной книге в день, прочитал их все меньше чем за два месяца. Сколько книг стоит на полке? (Перечислите все возможности).
6. Можно ли клетчатый прямоугольник размером 4x5 клеток разрезать на 7 различных фигур так, чтобы все клеточки остались целыми? Фигуры считаются различными, если их нельзя наложить друг на друга так, чтобы они совместились.

Ответы и решения.

1. **Ответ:** По 6 предметам.

   Решение: Сумма всех 12 оценок Федота равна 3,5 x 12 = 42, чтобы средний балл стал равен 4, она должна повыситься до 4 x 12 = 48. Поэтому Федот должен повысить на 1 балл оценки по 6 предметам.
2. **Ответ:** Сможет: 1 - на восток, 2 - на запад, 4 - на запад, 8 - на запад, 16 - на восток, 32 - на восток.

Решение: Покажем, как можно было получить этот результат. Заставим кузнечика прыгать «задом наперед» - из точки $\boldsymbol{A}$, находящейся на 35 м восточнее исходной, в исходную точку $\boldsymbol{O}$. Длины первых шести прыжков кузнечика равны 1, 2, 4, 8, 16, 32 а если прыгать «задом наперед», то они пойдут в обратном порядке: 32, 16, 8, 4, 2, 1. Направление прыжка каждый раз будем выбирать в сторону цели – точки $\boldsymbol{O}$. В итоге получится такая последовательность прыжков: 32 – на запад, 16 – на запад, 8 – на восток, 4 – на восток, 2 – на восток, 1 – на запад. Изменяя теперь направление всех прыжков и их порядок на противоположные, получаем ответ.

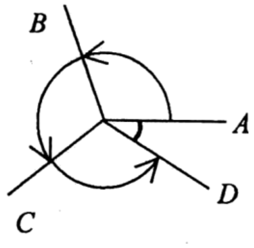


Рис. 5а

3. **Ответ:** Афродита.

Решение: Если самая прекрасная – Гера, то утверждение Афины, что Афродита не самая прекрасная, истинно, а должно быть ложным. Значит, Гера – не самая прекрасная. Но именно это утверждает Афродита. Значит, она говорит правду, т.е., самая прекрасная – Афродита. Утверждения Афины этому не противоречат, ибо в этом случае оба они ложны.

4. **Ответ:** 36°, 45°, 0°.

Решение: Если углы AOB, BOC и COD не равны 0°, то они следуют друг за другом в одном направлении (иначе угол AOD совпадал бы с COD или с AOB). При этом их сумма может быть меньше 360° (рис. 5а) и больше 360° (рис 5б). Обозначим величину угла AOD через X. Тогда каждый из углов AOB, BOC и COD равен 3X. В первом случае получается 9X + X = 360°, во втором получается 9X – X = 360°, откуда в первом случае X = 36°, а во втором X = 45°. Осталось заметить, что угол в 0° тоже проходит (ведь 0 = 3 x 0)

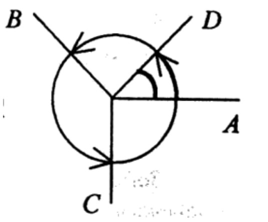


Рис. 5б

5. **Ответ:** 37 книг.

Решение: Пусть длина трети полки составляет $\boldsymbol{m}$ мм. Тогда $\boldsymbol{m}$ делится на 12, 15 и 18. Стало быть $\boldsymbol{m}$ делится на НОК (12, 15, 18) = 180. Если m = 180, то книг толщиной 12 мм на полке стоит 180:12 = 15 штук, книг толщиной 15 мм 180: 15 = 12 штук и книг толщиной 18 мм на полке стоит 180:18 = 10 штук. Всего книг получается в этом случае 37 штук, что удовлетворяет условию задачи. Если же $\boldsymbol{m} = 180\boldsymbol{k}$, где $\boldsymbol{k} \geq 2$, то книг получается $37\boldsymbol{k} \geq 74$, и двух месяцев на их прочтение не хватит. Получается, что единственный возможный ответ – 37 книг.

6. **Ответ:** Нельзя.
   Решение: Допустим, такое разрезание возможно. Различных клетчатых фигур из 1,2 и 3 клеток – ровно 4, и вместе они занимают 9 клеток. Поэтому среди семи различных клетчатых фигур четыре самые маленькие будут занимать не меньше 9 клеток, а остальные три будут состоять минимум из четырех клеток. Но тогда получается, что все фигуры вместе занимают не меньше, чем 12+9=21 клетку. Противоречие.

Старт – лига
II отборочный тур

1. Петя ехал в поезде. Сначала он читал книгу, затем – отдыхал, потом – смотрел в окно, а после – пил чай. На каждое из этих занятий, кроме первого, у Пети ушло вдвое меньше времени, чем на предыдущее. Начал книгу он в полдень, а закончил пить чай в час дня. Сколько было времени, когда Петя начал смотреть в окно?
2. У ромашки 12 лепестков. За ход разрешают оторвать либо один лепесток, либо два рядом растущих лепестка. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто выиграет при правильной игре, начинающий или второй игрок?
3. ***a, b, c*** - три различные цифры, отличные от нуля. Если сложишь все шесть двузначных чисел, которые можно записать с их помощью, не повторяя одну и ту же цифру в числе дважды, получится 176. Найдите эти цифры (укажите все возможные варианты).
4. Всем членам одной семьи сейчас 73 года. Состав семьи таков: муж, жена, дочь и сын. Муж старше жены на три года, дочь старше сына на два года. Четыре года назад всем членам семьи было 58 лет. Сколько лет каждому члену семьи сейчас?
5. Нарисуйте шестиугольник, который нельзя разрезать на два четырехугольника одним прямолинейным разрезом.
6. В написанном на доске примере на умножение были по ошибке исправлены две цифры. Получилось $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 2247$. Восстановите пример.

Ответы и решения.

1. **Ответ:** 12 часов 48 минут.
   Решение: Пусть Петя пил чай x минут. Тогда в окно он смотрел $2x$ минут, отдыхал $4x$ минут и читал книгу $8x$ минут. Значит, на все эти занятия вместе у него ушло $x + 2x + 4x + 8x = 15x$ минут,

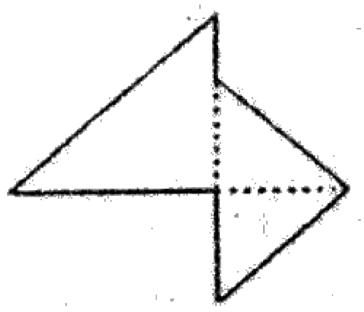
что по условию составляет 60 минут. Отсюда x равен 4 минутам. С полудня до момента, когда Петя начал смотреть в окно, прошло $8x + 4x = 12x = 48$ минут. Итак, Петя начал смотреть в окно в 12 часов 48 минут.

2. **Ответ:** Второй игрок выигрывает.
   Решение: Пусть 1-й игрок оторвал 1 или 2 рядом растущих лепестка. Тогда второй игрок должен оторвать столько же лепестков, причем они центрально – симметричны уже оторванным лепесткам. Тем самым оставшиеся лепестки разбиваются на две группы рядом растущих лепестков. Теперь игроки могут отрывать лепестки только из одной группы. Второму игроку остается повторять ходы его соперника в другой группе.

3. **Ответ:** 1, 2, 5 или 1, 3, 4.
   Решение: Запишем сумму указанных в условии двузначных чисел
   $$\overline{ab}+\overline{ac}+\overline{ba}+\overline{bc}+\overline{ca}+\overline{cb}$$
   $$=(10a+b)+(10a+c)+(10b+a)+(10b+c)+(10c+b)+(10c+a)=22(a+b+c)$$

   По условию $22(a+b+c)=176$, откуда $a+b+c=8$. Теперь задача свелась к такой: *найти все наборы из трех различных ненулевых цифр, сумма которых равна 8*. Будем считать, что через a обозначена самая маленькая из цифр, через b – средняя по величине, c – наибольшая. Тогда $a = 1$ (так как даже $2 + 3+ 4 >8$), следовательно, $b + c = 7$. Этому равенству удовлетворяют две пары цифр: $b = 2, c = 5,$ и $b = 3, c = 4$. Таким образом, искомыми цифрами могут быть 1, 2, 5 или 1, 3, 4.
4. **Ответ:** 3, 5, 31, 34.
   Решение: За четыре года суммарный возраст семьи увеличился на 15 лет, следовательно, младшему сыну – 3 года. Тогда сестре – 5 лет, а родителям в сумме 65 лет. Значит жене – 31 год, а мужу – 34 года.

5. **Решение:** (см. рисунок)



6. **Ответ:** $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 4 = 2240$ или $4 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 2240$
   Решение: В произведении три множителя четные, то есть если в исходном примере хотя бы один множитель был четным, тогда и произведение было четным. Значит, в правой части равенства изменена последняя цифра. Но тогда в

левой части изменено не более одной цифры, а тогда там есть и 4, и 5, то есть произведение оканчивается на 0. Так как $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 1600$, а 1600 отличается от 2240 на три цифры, то 2240 – верное произведение, а неверен один из множителей в левой части. При этом 2240 не делится на $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 5 = 400$, но делится на 7, то есть 7 исправлена на цифру 5. Таким образом, исходный пример имел вид: $4 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 4 = 2240$ или $4 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 4 = 2240$.

Четверть - финал

1. Каких прямоугольников с целыми сторонами больше: с периметром 2008 или с периметром 2010? (прямоугольники a х b и b х a считаются одинаковыми).

2. Может ли целое число при зачеркивании первой цифры уменьшиться в 57 раз? А в 58 раз?

3. Равенство 742586 + 829430 = 1212016 неверно. Но оно получено из верного равенства заменой всюду некоторой цифры x на y, а y на x. Какие это цифры?

4. Дано равенство $1:2:3:4:5:6:7:8:9:10=7$. Расставьте скобки в левой части равенства так, чтобы равенство оказалось верным.

5. Первый разбойник взял 100 рублей и десятую часть оставшейся части добычи, второй взял 200 рублей и десятую часть остатка, третий – 300 рублей и десятую часть остатка, и так далее. Сколько разбойников было и какова добыча, если добычу поделили поровну?

6. Первые $m \cdot n$ натуральных чисел $(m, n \in \mathrm{N})$ разбиваются на n групп по m чисел в каждой таким образом, чтобы суммы чисел во всех группах были одинаковыми.

   а) Можно ли это сделать в случае $m=8, \quad n=5$?
   б) Аналогичный вопрос для $m=5, \quad n=8$.

Ответы и решения.

1. **Ответ:** одинаково.
   Решение: Периметр прямоугольника со сторонами a и b равен $2(a+\mathrm{b})$. Пусть $a+\mathrm{b}=1004$. Будем считать, что $a \le b$. Тогда $a \le 502$.

Каждому $a \in [1;502]$ соответствует b: $a \leq b = 1004\text{-a}$ Число всех таких прямоугольников будет равно 502.
Если же $a + b = 1005$ и $a \leq b$, то $a \leq 502$ так же и $\forall a \in [1;502]$ соответствует $b = 1005\text{-a}$. Число этих прямоугольников так же равно 502.

2. **Ответ:** в 57 раз уменьшиться может – 7125; в 58 – нет.
   Решение: Пусть первая цифр числа равна a, а число имеет n цифр. Тогда $10^{n-1}a + B = 57B$. Далее, $10^{n-1}a = 56B = 8 \cdot 7 \cdot B$; 10^{n-1} на 7 не делится. Поэтому $a = 7$ и $10^{n-1} = 8 \cdot B$. Самое маленькое n для которого $10^{n-1} \vdots 8$, равно 4. $1000 \vdots 8 = 125$. Имеем $7125 : 125 = 57$.
   Если же $10^{n-1}a + B = 58B$, то $10^{n-1}a = 57B = 3 \cdot 19 \cdot B$, но если a – цифра, то 10^{n-1} не делится на 19, противоречие.

3. **Ответ:** 2 и 6.
4. **Решение:**
   $(1:2:3:4:5):(6:7:8:9:10) = \dfrac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5} : \dfrac{6}{7\cdot8\cdot9\cdot10} = \dfrac{7\cdot8\cdot9\cdot10}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} = 7$.
5. **Ответ:** 9 разбойников, добыча 8100 рублей.
   Решение: Пусть число разбойников равно n. Тогда последний взял оставшиеся деньги и получил 100n рублей. $(\text{n-1})-\text{й}$ разбойник получил (n-1)100 рублей и еще $\dfrac{1}{10}$ остатка. Если теперь остаток был x рублей, то $(\text{n-1})-\text{й}$ разбойник взял $\dfrac{1}{10}x$ и последнему осталось $\dfrac{9}{10}x$ рублей. Имеем равенство $\dfrac{9}{10}x = 100\text{n}$ и $x = \dfrac{1000n}{9}$. Тогда у $(\text{n-1})-\text{го}$ разбойника будет $100(\text{n-1}) + \dfrac{100n}{9} = 100n$; $n - 1 + \dfrac{n}{9} = n$ или $n = 9$. Далее, каждый взял по 900 рублей, и всего денег было 8100 рублей.

6. **Ответ:** а) да; б) нет.
   Решение:
   а) Сумма всех чисел равна $\dfrac{40\cdot41}{2} = 20\cdot41$. Разделим на 5 групп по 8 чисел. Сумма этих 8 чисел должна быть равна $4\cdot41$. Разделим все числа на пары $(1{,}40),(2{,}39),\ldots(20{,}21)$. Сумма чисел в каждой паре 41. Дальнейшее ясно. Выбрав произвольные 4 пары, получим 8 чисел с суммой $4\cdot41$.

б) Если выбрать 8 групп по 5 чисел, то сумма чисел в этих группах должна быть равной $20\cdot 41:8=\frac{5\cdot 41}{2}$, что невозможно.

Полуфинал

1. Известно, что $a+b+c=7$, а $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}=0{,}7$. Найдите сумму: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$.
2. В трапеции ABCD (AD||BC) AB=BC=0,5AD.Найти угол ACD.
3. В трамвае ехало 60 человек: контролеры, кондукторы, лжекондукторы (граждане, выдававшие себя за кондукторов), лжеконтролеры (граждане, выдававшие себя за контролеров), и, возможно, обычные пассажиры. Общее количество лжекондукторов и лжеконтролеров в 4 раза меньше количества настоящих кондукторов и контролеров. Общее количество контролеров и лжеконтролеров в 7 раз больше общего количества кондукторов и лжекондукторов. Сколько в трамвае обычных пассажиров?
4. Двое по очереди разламывают шоколадку 5×10. За ход разрешается сделать прямолинейный разлом любого из имеющихся кусков вдоль углубления. Выигрывает тот, кто первым отломит дольку 1×1. Кто и как выиграет при правильной игре?
5. Из простого двузначного числа вычли число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, которое так же оказалось простым, и получили квадрат натурального числа. Каким могло быть исходное число?
6. Найдите наибольшее возможное значение выражения: $20x-4y+6z-2x^2-4y^2-3z^2-2$. При каких значениях переменных оно достигается?

Ответы и решения.

1. **Ответ:** 1,9.

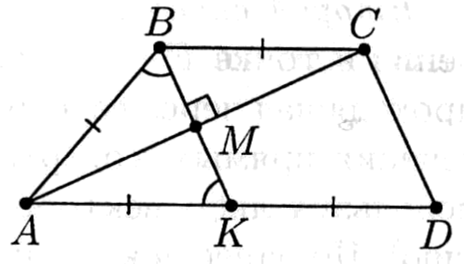
   Решение: Перемножим почленно данные верные равенства:

$$\frac{a+b+c}{a+b}+\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}=4{,}9\Leftrightarrow 1+\frac{c}{a+b}+1+\frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{c+a}=4{,}9\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=1{,}9$$

2. **Ответ:** 90°.

Решение: Проведем в данной трапеции биссектрису угла ABC, которая пересечет диагональ AC в точке M, а основание AD – в точке K. (см рисунок).



Так как ∠ AKB = ∠CBK = ∠ ABK, то AB = AK = KD = BC, то есть, BCDK - параллелограмм; Δ ABC – равнобедренный, значит, BM ⊥AC. Так как CD||BM, то CD⊥AC.

3. **Ответ:** 20.
   Решение: Общее количество лжеконтролеров и лжекондукторов в 5 раз меньше количества необычных пассажиров (то есть контролеров, кондукторов, лжеконтролеров и лжекондукторов). Следовательно, количество необычных пассажиров кратно 5. Аналогично, количество кондукторов и лжекондукторов в 8 раз меньше количества необычных пассажиров, следовательно, количество необычных пассажиров кратно 8. Таким образом, количество необычных пассажиров кратно 40 и при этом не превосходит 60. Значит, всего имеется 40 необычных пассажиров, а остальные 20 пассажиров – обычные.

4. **Решение:** Проигрывает тот, кто отломит кусок ширины 1.Выигрывает первый игрок. Первым ходом он разламывает шоколадку на два куска 5×5. Дальше симметрия.

5. **Ответ:** 73.
   Решение: Пусть исходное число $\overline{ab} = 10a + b$. Тогда число $\overline{ab} - \overline{ba} = (10a + b) - (10b + a) = 9(a - b)$ является квадратом натурального. Поэтому число $a - b$ так же должно являться полным квадратом, то есть, $a - b = 1$ или $a - b = 4$. Поскольку числа $\overline{ab}$ и $\overline{ba}$ - простые, то обе цифры a и b - нечетные, значит, $a - b = 4$. Перебирая все варианты, находим числа 51, 73 и 95, из которых простым является только 73, причем число 37 – также простое.

6. **Ответ:** 52; при *x = 5, y =* - *0,5* и *z =1.*

Решение: Преобразуем данное выражение:
$20x-4y+6z-2x^2-4y^2-3z^2-2=\left(-2x^2+20x\right)-\left(4y^2+4y\right)-\left(3z^2-6z\right)-2=$
$=-2\left(x^2-10x+25-25\right)-\left(4y^2+4y+1-1\right)-\left(3z^2-6z+3-3\right)-2=$
$=-2(x-5)^2+50-(2y+1)^2+1-3(z-1)^2+3-2=52-2(x-5)^2-(2y+1)^2-3(z-1)^2$.
Так как $2(x-5)^2\ge 0, (2y+1)^2\ge 0, (z-1)^2\ge 0$, то наибольшее возможное значение выражения равно 52. Оно достигается при x = 5, y = -0,5 и z = 1.

Финал

1. Некоторое простое число возвели в четвертую степень и получили десятизначное число. Могут ли все цифры полученного числа быть разными?
2. В вершинах куба расставлены числа от 1 до 8. На каждой грани записана сумма чисел, расставленных в её вершинах. Может ли оказаться так, что на гранях записано шесть последовательных натуральных чисел?
3. В зоопарке дорожки образуют равносторонний треугольник, в котором проведены средние линии. Из клетки сбежала обезьяна. Её ловят два сторожа. Смогут ли они поймать обезьяну, если все трое будут бегать только по дорожкам, скорости обезьяны и сторожей равны и все они видят друг друга?
4. В треугольнике ABC: $\angle A=15^\circ$, $\angle B=30^\circ$. Через точку C проведен перпендикуляр к AC, который пересекает сторону AB в точке M. Найдите BC, если $AM = 5$.
5. Дан квадратный трехчлен ax^2+bx+c, все коэффициенты которого отличны от нуля. Ваня и Петя должны найти количество его корней. Ваня случайно поменял коэффициенты a и b и получил, что трехчлен имеет один корень. Петя вместо этого поменял местами b и c и также получил, что корень – один. Сколько корней у трехчлена на самом деле?
6. После того, как учительница Марьиванна пересадила Вовочку с первого ряда на второй, Ванечку со второго ряда на третий, а Машеньку - с третьего ряда на первый, средний возраст учеников, сидящих в первом ряду, увеличился на неделю, сидящих во втором ряду – увеличился на две недели, а сидящих в третьем ряду – уменьшился на четыре недели. Известно, что на первом и на втором ряду сидят по 12 человек. Сколько человек сидит в третьем ряду?

Ответы и решения.

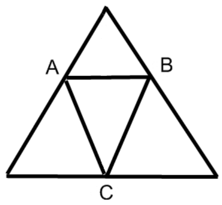
1. **Ответ:** нет, не могут.

Решение: Предположим, что все цифры полученного числа различны, тогда это цифры 0, 1, 2, …, 9, взятые по одному разу. Сумма этих цифр равна 45, то есть, полученное десятизначное число делится на 9. Простое число, которое возвели в четвертую степень, очевидно, не равно трем, поэтому не делится на 3. Следовательно, и десятизначное число не делится на 3, а значит, не делится и на 9. Таким образом, оно имеет в своей записи хотя бы две одинаковые цифры.

2. **Ответ:** Нет, не может.

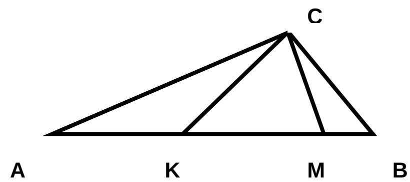
   Решение: Пусть на гранях записано шесть последовательных натуральных чисел, n – наименьшее из них, а S – их сумма. Тогда $S = n + (n+1) + \ldots + (n+5) = 6n + 15$. Так как каждая вершина принадлежит трем граням куба, то каждое число от 1 до 8 входит в три суммы, записанные на гранях. Поэтому, $S = (1 + 2 + \ldots + 8) \cdot 3 = 108$. Уравнение $6n + 15 = 108$ не имеет натуральных решений, так как в его левой части – нечетное число, а в первой части – четное.

3. **Ответ:** Смогут.

   Решение: Сторожа поймают обезьяну, если примут следующий план. Вначале они должны занять вершины А и В (см. рисунок); очевидно, можно считать, что обезьяна находится в нижней части рисунка. Теперь один сторож должен спускаться вдоль АС, а второй - контролировать отрезок АВ, чтобы обезьяна не проскочила через А или В. Дальнейшее просто.

4. **Ответ:** 2,5.

   Решение: Проведем СК – медиану прямоугольного треугольника САМ (см. рисунок).

   $\Rightarrow CK = AK = KM = 2{,}5 \Rightarrow \Delta AKC -$ равнобедренный. Так как $\angle$СКВ – внешний для равнобедренного треугольника АСК, то

   $\angle$СКВ=30º =$\angle$СВК.

   ΔКСВ – равнобедренный, то есть СВ = СК = 0,5 АМ = 2,5.

5. **Ответ:** 0.

   Решение: Так как трехчлен $bx^2 + ax + c$ имеет один корень, то $a^2 - 4bc = 0 \Leftrightarrow a^2 = 4bc$. Аналогично, так как трехчлен $ax^2 + cx + b$ также имеет один корень, то $c^2 - 4ab = 0 \Leftrightarrow c^2 = 4ab$. Перемножив полученные равенства и разделив обе части на *ac*, получим, что $ac = 16b^2$.

Дискриминант данного трехчлена: $D = b^2 - 4ac = b^2 - 64b^2 = -63b^2 < 0$ при $b \neq 0$. Следовательно, данный трехчлен корней не имеет.

6. **Ответ:** 9 человек.

Решение:

Первый способ: Пусть в третьем ряду сидит *x* человек. Так как средний возраст равен сумме возрастов, деленной на количество человек, то после пересаживания суммарный возраст детей на первом ряду увеличился на 12 недель, на втором ряду – увеличился на 24 недели, а на третьем ряду – уменьшился на 4*x* недель. Поскольку сумма возрастов всех учеников измениться не могла, то $4x = 12 + 24$, то есть, $x = 9$.

Второй способ: Пусть до пересаживания учеников средний возраст сидящих на первом, втором и третьем ряду составлял *a, b* и *c* недель соответственно. Обозначим также: количество человек, сидящих в третьем ряду – *x*, возраст Вовочки – V недель, возраст Ванечки – W недель, возраст Машеньки – M недель. Исходя из условия задачи, составим три уравнения:

1. $\dfrac{12a + M - V}{12} = a + 1$
2. $\dfrac{12b + V - W}{12} = b + 2$
3. $\dfrac{xc + W - M}{x} = c - 4$

Решаем систему:

$$\begin{cases} \dfrac{12a + M - V}{12} = \mathrm{a} + 1 \\ \dfrac{12b + V - W}{12} = b + 2 \\ \dfrac{xc + W - M}{x} = c - 4 \end{cases}$$

Упростив эти уравнения:

$$\begin{cases} \mathrm{M} - \mathrm{V} = 12 \\ V - W = 24 \quad + \\ W - M = -4x \end{cases}$$

$$0 = 12 + 24 - 4\mathrm{x}$$

2010-2011 учебный год.

Показательная игра

1. Пусть S – сумма цифр числа a, T - сумма цифр числа b. Докажите, что если S + T делится на 9, то a + b также делится на 9.

2. Белка взбирается на ствол дерева по спирали, поднимаясь за один виток на 2 метра. Сколько метров она преодолеет, добравшись до вершины, если высота дерева равна 8 метров, а окружность дерева – 1,5 метра.

3. «Спускаясь вниз по эскалатору метро, я насчитал 50 ступенек», - сказал Вася. «А я насчитал 75, – возразил Петя, - но я спускался в 3 раза быстрее». Если бы эскалатор остановился, то сколько ступенек можно было бы насчитать на его видимой части?

4. Найдите $2x - y - 6z + 17t$, если известно, что $3x - 2y - z + t = 1$, $x + 2y + 2z + 2t = 2$, $x + y + 3z - 4t = 5$.

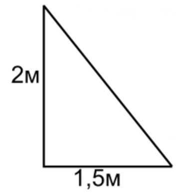
5. На сторонах выпуклого четырехугольника ABCD, площадь которого равна единице, взяты точки $K \in AB$, $L \in BC$, $M \in CD$, $N \in DA$. При этом $\frac{AK}{KB} = 2$, $\frac{BL}{LC} = \frac{1}{3}$, $\frac{CM}{MD} = 1$, $\frac{DN}{NA} = \frac{1}{5}$. Найдите площадь шестиугольника AKLCMN.

6. В одном доме произошел сильный взрыв, в результате чего дом полностью сгорел. Прибывшая на место происшествия милиция нашла обгоревшие настенные часы, у которых циферблат полностью выгорел, но минутная и часовая стрелки остались. Эксперты измерили угол между этими стрелками, который оказался равен 50°. Можно ли по этим данным установить точное время взрыва, если известно, что он произошел между 9 и 10 часами утра?

Ответы и решения.

1. **Решение:** Известно, что если из числа вычесть сумму его цифр, то получившееся число делится на 9. Тогда a – S и b – T делятся на 9. Далее $(a - S) + (b - T) = (a + b) - (S + T)$ делится на 9. Но $S + T \vdots 9 \Rightarrow a + b \vdots 9$.

2. **Ответ:** 10 метров.
Решение: Сделаем развертку дерева. За виток белка преодолеет гипотенузу, равную $\sqrt{4+2{,}25}=2{,}5$ метра. Тогда все расстояние равно $2{,}5\cdot 4=10$ метров. (Сделано 4 витка).



3. **Ответ:** 100.
Решение: Если Вася идет со скоростью v, то Петя - со скоростью $3v$. Следовательно, отношение времен будет $\frac{75}{3v}:\frac{50}{v}=\frac{1}{2}$, т.е. Вася провел на эскалаторе в 2 раза больше времени. За это время он «проехал» $(x-50)$ ступенек, а Петя - $(x-75)$ ступенек. Имеем уравнение $x-50=2(x-75)$, откуда $x=100$.

4. **Ответ:** $a=1$, $c=-3$, $b=2$; -10
Решение: Пусть a, b,c таковы, что $a(3x-2y-z+t)+b(x+2y+2z+2t)+c(x+y+3z-4t)= =2x-y-6z+17t$.
Приравнивая коэффициенты при неизвестных, имеем

$$\begin{cases} 3a+\mathrm{b}+\mathrm{c}=2 \\ -2a+2b+c=-1 \\ -a+2b+3c=-6 \\ a+2b-4c=17 \end{cases}$$

Уничтожим b. Из первого равенства, умноженного на 2, вычитаем остальные равенства, получим:

$$\begin{cases} 8a+c=5 \\ 7a-c=10 \\ 5a+6c=-13 \end{cases}$$

Откуда следует, что $a=1$, $c=-3$, $b=2$
Тогда $2x-y-6z+17t=1\cdot 1+2\cdot 2+(-3)\cdot 5=-10$

5. **Ответ:** $\frac{11}{12}$
Решение:
ΔKBL и ΔKLC имеют общую высоту, следовательно, $\frac{S_{KBL}}{S_{KLC}}=\frac{1}{3}$, пусть $S_{KBL}=x$, $S_{KLC}=3x$.
ΔCBK и ΔCKA имеют общую высоту, следовательно, $\frac{S_{CBK}}{S_{CKA}}=\frac{4x}{S_{CKA}}=\frac{1}{2}$, $S_{CKA}=8x$.

ΔMND и ΔMAN имеют общую высоту, следовательно, $\dfrac{S_{MND}}{S_{MAN}} = \dfrac{1}{5}$,

пусть $S_{MND} = y$, $S_{MAN} = 5y$.

AM – медиана ΔACD, следовательно, $\dfrac{S_{ACM}}{S_{ADM}} = 1 = \dfrac{S_{ACM}}{6y}$, тогда,

$S_{\text{ÀÑM}} = 6y$

$S_{\text{ÀBCD}} = x + 3x + 8x + y + 5y + 6y = 12x + 12y = 12(x + y)$.

По условию $12(x + y) = 1$, следовательно, $x + y = \dfrac{1}{12}$.

$S_{\text{ÀKLCMN}} = 3x + 8x + 6y + 5y = 11(x + y) = 11 \cdot \dfrac{1}{12} = \dfrac{11}{12}$.

6. **Ответ:** Да, можно (в 9 часов 40 минут или в 9 часов $58\dfrac{2}{11}$ минут).

   Решение: Ровно в 9 часов угол между стрелками равен 90°. Пусть, после 9 часов прошло x минут. Минутная стрелка опишет за это время 6x°, а часовая – 0,5x° (в 12 раз меньше) При этом если минутная стрелка не догнала часовую стрелку, то имеем равенство 50° + (90° - 0,5x°) + 6x° = 360°, откуда x = 40 минут. Если же минутная стрелка перегнала часовую стрелку, то имеем равенство (90° - 0,5x°) - 50° + 6x° = 360°, откуда $x = 58\dfrac{2}{11}$ минут.

   Теперь, если на обгоревших часах (по часовой стрелке) часовая стрелка находится дальше минутной, то взрыв произошел в 9 часов 40 минут, если же минутная стрелка дальше часовой (по часовой стрелке), то взрыв произошел в 9 часов $58\dfrac{2}{11}$ минуты.

Четверть – финал

1. Расшифруйте ребус на сложение: (Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным – разные). Сколько решений имеет задача?

+	О	Д	И	Н
	О	Д	И	Н
М	Н	О	Г	О

2. На доске написано некоторое число. К этому числу прибавляют 4 или умножают его на 3, результат записывают вместо данного числа. С полученным числом проделывают тоже самое. Можно ли, действуя

таким образом получить из 1 число 100? А число 99?

3. Найдется ли такое четырехзначное число, которое увеличивалось бы вдвое от перестановки начальной цифры в конец?
4. Найдите значение выражения: $\dfrac{8+222\cdot 444\cdot 888+444\cdot 888\cdot 1776}{2\cdot 4\cdot 8+444\cdot 888\cdot 1776+888\cdot 1776\cdot 3552}$
5. Двое по очереди ставят крестики в клетки доски размером 4×4. Проигрывает тот, после чьего хода образуется квадрат 2×2, в каждой клетке которого стоит крестик. Кто выиграет: начинающий или его партнер, и как нужно играть, чтобы выиграть?
6. Каждый зритель, пришедший на спектакль «Королевский жираф», принес с собой либо одну дохлую кошку, либо два кочана гнилой капусты, либо три тухлых яйца. Стоявший у входа Гекльберри Финн подсчитал, что кошек было 64 штуки. После спектакля оба артиста – король и герцог – были с ног до головы закиданы припасами, причем на долю каждого досталось поровну предметов (а промахов жители Арканзаса не делают). Правда, король принял на себя лишь пятую часть всех яиц и седьмую часть капусты, но все дохлые кошки полетели именно в него. Сколько зрителей пришло на представление?

Ответы и решения.

1. **Ответ:** $\overline{ОДИН}=6823$

   Решение: Отметим, что $M=1$, поэтому $O\geq 5$. С другой стороны, $2\cdot\overline{ОДИН}=\overline{МНОГО}$, поэтому число O - четное. Итак, $O=6$ или $O=8$.

   Если далее допустить, что $O=8$, то $H=6$ или 7. Но тогда 2Н заканчивается цифрой 2 или цифрой 4, противоречие. Поэтому $O=6$. Дальнейшее рассуждение ясно.

2. **Ответ:** можно получить 99.

   Решение: На каждом шаге будут получатся нечетные числа. Поэтому число 100 получить нельзя, а 99 можно, например 1 $\to$ 3 $\to$ 7 $\to$ 11 $\to$ 33 $\to$ 99.

3. **Ответ:** не найдется.

   Решение: Допустим, что такое число $\overline{abcd}$ найдется. Тогда $2\cdot\overline{\mathrm{abcd}}=\overline{\mathrm{bcda}}$ или $2(1000a+100\mathrm{b}+10\mathrm{c}+\mathrm{d})=1000\mathrm{b}+100\mathrm{c}+10\mathrm{d}+\mathrm{a}$. Пусть $x=100b+10c+d$, тогда получим, что $8x=1999a$. Из последнего равенства следует, что a делится на 8. Но a – цифра, поэтому $a=8$. В результате имеем, что трехзначное число $x=1999$, противоречие.

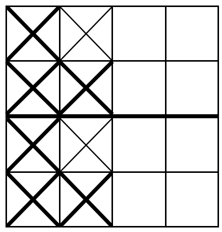
4. **Решение:**

$$\frac{8+222\cdot 444\cdot 888+444\cdot 888\cdot 1776}{2\cdot 4\cdot 8+444\cdot 888\cdot 1776+888\cdot 1776\cdot 3552}=\frac{1\cdot 2\cdot 4\cdot(1+222^3+444^3)}{2\cdot 4\cdot 8\cdot(1+222^3+444^3)}=\frac{1}{8}.$$

5. **Ответ:** выигрывает второй игрок.

Решение: Разделим доску на две равные части горизонтальной прямой. На каждый ход первого игрока второй должен отвечать точно таким же ходом, но на другой части доски. Например, если первый игрок закрасил левый верхний угол, то второй должен закрасить на левой вертикали вторую клетку снизу.

Покажем, что такая стратегия второго игрока приведет к его выигрышу. После каждого хода второго игрока картинка на обеих половинках доски будет одинаковой. Если после первого хода игрока в одной из половин доски не образовалось квадрата 2×2, заполненного крестиками, то и после хода второго в другой половине доски такого квадрата образоваться не может.



Допустим что такой квадрат образовался после хода второго игрока на «стыке» двух половин доски. Но тогда такой же квадрат образовался ранее, после хода первого игрока на одной из половин доски.

Отметим, что вместо горизонтальной прямой, делящей доску на две равные части, можно использовать и вертикальную прямую. Приведенное решение можно использовать и в случае, если доска для игры является прямоугольником размера 4×*n*.

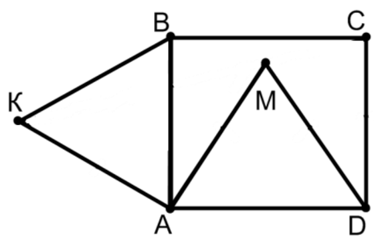
6. **Ответ:** 101.

Решение: Пусть в короля попало x яиц, y кочанов и 64 кошки. Тогда герцогу досталось $4x$ яиц и $6y$ кочанов. Так как предметов, угодивших в них, равное количество, то составляем уравнение: $x+y+64=4x+6y$, которое равносильно уравнению $3x+5y=64$. Из условия задачи следует, что общее количество яиц делится на 3, а общее количество кочанов – на 2. Следовательно, $5x$ кратно трем, а $7y$ кратно двум. С учетом того, что числа 5 и 3, а так же числа 7 и 2 образуют пары взаимно простых чисел, имеем, что $x=3\mathrm{k}$, а $y=2n$, где $k\in\mathrm{N}$ и $n\in\mathrm{N}$. Подставляя в исходное уравнение, получаем: $9k+10n=64$. Перебором находим, что его решением в натуральных числах является только $n=1$; $k=6$. То есть, $x=18$;

$y=2$. Значит, на представление было принесено $5x=90$ (яиц), $7y=14$ (кочанов) и 64 кошки. Следовательно, количество зрителей, пришедших на представление, равно: $90:3+14:2+64=101$.

Полуфинал

1. У девятиклассника – 10 учебных предметов. Его средний балл за четверть равен 4,6. Сколько у него троек, четверок и пятерок, если известно, что присутствуют все эти оценки, а двоек у него нет?
2. Из двух городов Добруйска и Бодруйска, расстояние между которыми равно 40 км, навстречу друг другу одновременно выехали два велосипедиста Доби и Боди. Доби передвигался со скоростью 23 км/ч, а Боди со скоростью 17 км/ч. Перед отправлением на нос Доби села муха, которая в момент его выезда из города полетела по направлению к Бодруйску со скоростью 40 км/ч. Муха встретилась с Боди, и тут же повернула обратно, и полетела по направлению к Добруйску со скоростью 30 км/ч. (Дело в том, что от Добруйска к Бодруйску дул ветер). Встретившись с Доби, муха вновь повернула обратно и т.д. Определите суммарный путь, который пролетела муха до момента встречи велосипедистов. (Ее скорости в каждом направлении не менялись).
3. На одном первобытном базаре шкура мамонта обменивалась на две шкуры тигра, а юбка из павлиньих перьев – на три копья. На другом базаре, который находился в одном дне пути от первого, шкура мамонта обменивалась на три юбки из павлиньих перьев, а шкура тигра на 4 копья. Охотник принес на базар шкуру мамонта и хочет выменять ее на четыре тигровых шкуры. Успеет ли он это сделать за 33 дня?
4. Докажите, что $2010^2+2010^2\cdot 2011^2+2011^2$ точный квадрат.
5. ABCD – квадрат. Треугольники AMD и AKB – равносторонние (см. рисунок). Верно ли, что точки C, M и K лежат на одной прямой?



6. Дан клетчатый прямоугольник 1×1000. Двое играют в следующую игру. Ходят по очереди. За один ход играющий может покрасить клетки какого-то прямоугольника 1×1, 1×3 или 1×5 клеток (два раза красить одну и ту же клетку нельзя). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может обеспечить себе победу независимо от игры соперника?

Ответы и решения.

1. **Ответ:** одна тройка, две четверки, семь пятерок.
   Решение:
   Способ 1. Пусть a, b и c - количество пятерок, четверок и троек соответственно. Тогда: $5a+4b+3c=46$ и $a+b+c=10$. Решая эту систему уравнений, получим: $b=16-2a$. Следовательно, b – четное число. Учитывая, что $2 \le b \le 8$, осуществляем перебор:
   a. если $b=8$, то $a=4$, что противоречит утверждению $a+b+c=10$;
   b. если $b=6$, то $a=5$, что также противоречит утверждению $a+b+c=10$;
   c. если $b=4$, то $a=6$, что также противоречит утверждению $a+b+c=10$;
   d. если $b=2$, то $a=7$, $c=1$,

   Способ 2. Сумма всех оценок девятиклассника равна 46. Если бы девятиклассник учился на одни пятерки, то эта сумма была бы равна 50, то есть на 4 балла больше, чем в реальности. Замена оценки «5» на «3» уменьшает общую сумму на 2 балла, а замена «5» на «4» - на 1 балл.
   Представим число 4 в виде суммы двоек и единиц: $4=2+2=2+1+1=1+1+1+1$. Так как все оценки у ученика присутствуют, то возможен только случай $4=2+1+1$. Следовательно, возможен единственный набор оценок, который и приведен в ответе.

2. **Ответ:** $37\frac{4}{7}$ км.

   Решение: Доби и Боди встретятся через $\frac{40}{23+17}=1$час. Пусть суммарный путь, который муха пролетела от Добруйска к Бодруйску, равен x (км). Поскольку встреча велосипедистов произошла в 23 км от Добруйска, и муха в этот момент находилась в той же точке, то суммарный путь, который муха пролетела по направлению от Бодруйска к Добруйску, равен x – 23 км. Поскольку муха летала 1 час, то получаем уравнение $\frac{x}{40}+\frac{x-23}{30}=1$. Отсюда $3x+4(x-23)=120$, $x=\frac{212}{7}=30\frac{2}{7}$ км. Тогда суммарный путь мухи равен $x+(x-23)=30\frac{2}{7}+7\frac{2}{7}=37\frac{4}{7}$ км.

3. **Ответ:** Успеет.

Решение: Пусть М – шкура мамонта, Т – шкура тигра, Ю – юбка из перьев, К – копье.

I – первый базар: М = 2Т, Ю = 3К.

II - второй базар: М = 3Ю, Т = 4К,

1 день. Перешел с I на II и разменял М $\to$ 3Ю.

2 день. Перешел с II на I и разменял 3Ю $\to$ 9К.

3 день. Перешел с I на II и разменял 9К $\to$ 2Т + К.

4 день. Перешел с II на I и разменял 2Т + К $\to$ М +К.

Итак, за 4 дня охотник добавил к шкуре мамонта 1 копье. За 32 дня он добавит к шкуре мамонта 8 копий, которые можно разменять еще на две шкуры тигра. Точнее на 31-й день у него будет 16 копий, которые он разменяет на 4 шкуры тигра.

4. **Решение:** Это следует из тождества $a^2+a^2(a+1)^2+(a+1)^2=(a^2+a+1)^2$.

Пусть $a=2010$, тогда $a+1=2011$, получим

$$a^2+a^2(a+1)^2+(a+1)^2=a^2+a^2(a^2+2a+1)+(a^2+2a+1)=a^4+2a^3+3a^2+2a+1=$$

$$=a^4+a^2+1+2a^3+2a^2+2a=(a^2+a+1)^2.$$

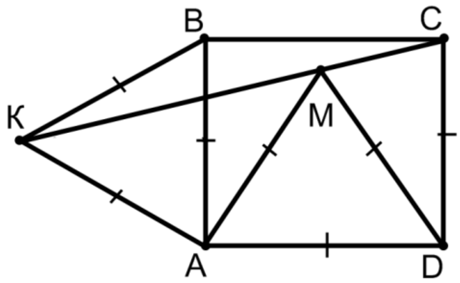
Пояснение:

1) $3a^2=2a^2+a^2$

2) $a^4+a^2+1=(a^2)^2+2a^2+1-a^2=(a^2+1)^2-a^2=(a^2+1-a)(a^2+1+a)$

5. **Ответ:** Да, верно.

Решение: Проведем отрезки МК и МС и докажем, что $\angle$КМС – развернутый (см. рис). Так как сторона каждого равностороннего треугольника равна стороне квадрата, то треугольник КАМ и MDC – равнобедренные с основаниями КМ и МС соответственно. Заметим, что $\angle$КАМ = $\angle$КАВ + $\angle$ВАМ = 60° + 30° = 90°, а $\angle$MDC = 30°. Следовательно, $\angle$КМА = 45°, $\angle$DMC = 75°. То есть, $\angle$КМС = $\angle$КМА + $\angle$AMD + $\angle$DMC = 45° + 60° + 75° = 180°, то есть точки С, М и К лежат на одной прямой.



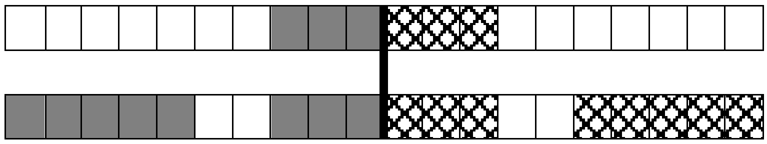
6. **Ответ:** Второй игрок.

Решение: Так как дан прямоугольник 1×1000, то всего клеток 1000.

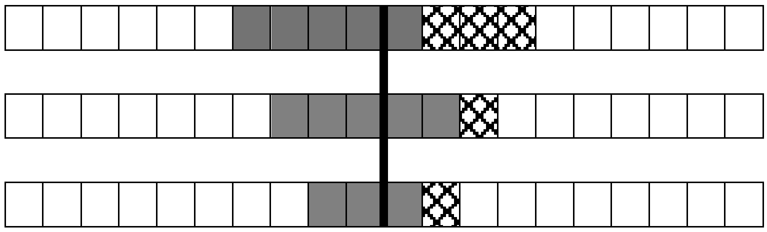
Способ 1. Закрашивать можно 1, 3 или 5 клеток, следовательно, как бы ни сходил I игрок, после хода II игрока будет закрашено четное число клеток (как сходил II игрок значения тоже не имеет). Следовательно, остается не закрашенным тоже четное число клеток. Получим, что после хода II игрока будет оставаться четное число, а после хода I игрока нечетное число. Следовательно, 0 не закрашенных клеток останется после хода II игрока, он и выиграет независимо от игры соперника (т.к. 0 – четное число).

Способ 2. Используем симметрию.

1). Предложим выигрышную стратегию для II игрока. Пусть он красит прямоугольники симметрично относительно центра прямоугольника. Такой ответный ход возможен.



2). Если же I игрок покрасит прямоугольник, содержащий центр доски, то II игрок в этом случае должен красить так, чтобы после его хода множество покрашенных клеток было симметрично относительно центра прямоугольника.



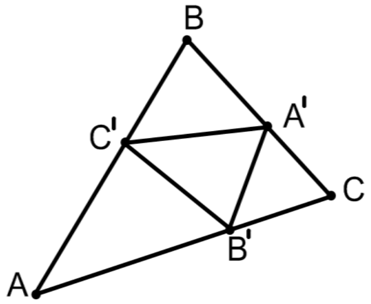
Финал

1. Числа x, y, z удовлетворяют равенству $(x+y+z)(xy+yz+zx)=xyz$. Докажите, что среди них есть два числа, сумма которых равна нулю.
2. На доске написано три числа: 19, 9 и 7. С этими числами разрешается делать две операции:
   a. Удвоить любое из чисел;
   b. От каждого из чисел отнять по 1.

   Можно ли, проделав несколько таких операций, получить три нуля?
3. Эксперту полиции принесли 13 одинаковых с виду монет, из которых 7 монет были настоящие, а остальные фальшивые. Все настоящие монеты весят одинаково, а каждая фальшивая – на 1

грамм легче или тяжелее настоящей. Имеются электронные чашечные весы, которые показывают разность масс грузов на чашах. Эксперт берет наугад одну монету. За какое наименьшее количество взвешиваний он сможет выяснить, фальшивая она или настоящая? (Взвешивать можно любые наборы монет).

4. Если в пятизначном числе изменить порядок цифр на противоположный, то оно увеличится в 9 раз. Найдите исходное число.
5. На сторонах треугольника ABC взяты точки A′, B′ и C′ так, что ∠AC′B′ = ∠B′A′C, ∠BA′C′ = ∠C′B′A и ∠CB′A′ = ∠A′C′B (см. рис.). Докажите, что точки A′, B′ и C′ - середины сторон треугольника ABC.



6. Дама сдавала в багаж: диван, чемодан, саквояж, корзину, картину, картонку и маленькую собачонку. Диван весил столько же, сколько чемодан и саквояж, вместе взятые, и столько же, сколько картина, корзина и картонка, вместе взятые. Картина, корзина и картонка весили поровну и каждая из них больше, чем собачонка. Когда выгружали багаж, дама заявила, что собака не той породы. При проверке оказалось, что собака перевешивает диван, если ей на весы добавить саквояж или чемодан. Докажите, что претензия дамы была справедлива.

Ответы и решения.

1. **Решение.**

Из тождества $(x+y+z)(xy+yz+zx)=(x+y)(y+z)(z+x)+xyz$ с учетом условия задачи следует, что $(x+y)(y+z)(z+x)=0$. Значит, какая – либо сумма обращается в нуль.

2. **Ответ:** Можно.

   Решение:

	Этапы решения: Вначале было →	19	9	7
a.	От каждого из чисел будем вычитать 1 до тех пор, пока одно не будет равно 1	13	3	1
b.	Удвоим все 1 и вновь вычтем из всех трех чисел 1	12	2	1
c.	Повторим операцию 2.	11	1	1
d.	Удвоим обе 1 и затем, вычитая 1 из всех трех чисел за несколько шагов, получим:	1	1	1
e.	Вычтем 1 из всех трех чисел	0	0	0

Заметим, что таким же способом можно решать более общую задачу: вместо чисел 19, 9, 7 можно взять три произвольных натуральных числа a, b и c.

3. **Ответ:** За одно взвешивание.
Решение: Положим на весы все оставшиеся монеты (по 6 на каждую чашку весов). Если выбранная монета настоящая, то среди оставшихся будет четное число фальшивых монет, а следовательно, разность, показанная стрелкой, будет равна четному числу. Если она фальшивая, то среди оставшихся монет будет нечетное число фальшивых, а разность будет равна нечетному числу.

4. **Ответ:**10989.
Решение: Пусть число имеет вид $\overline{xyzuv}$, тогда $9 \cdot \overline{xyzuv} = \overline{vuzyx}$. Если $x \neq 1$, то произведение в левой части будет числом шестизначным.
Итак, $x = 1$, но тогда $v = 9$, так как произведение 9 на v оканчивается 1 только при $v = 9$. Уравнение $9 \cdot \overline{xyzuv} = \overline{vuzyx}$ можно записать $9 \cdot 10^4 + 9 \cdot (\overline{yzu9}) = 9 \cdot 10^4 + \overline{uzy1}$ откуда $9 \cdot \overline{yzu9} = \overline{uzy1}$
Для y есть две возможности:
1) $y = 1$, тогда по аналогии с предыдущим $u = 9$ и $9 \cdot 10^3 + 9 \cdot \overline{z99} = 9 \cdot 10^3 + \overline{z11}$ откуда $9 \cdot \overline{z99} = \overline{z11}$ (невыполнимо)
2) $y = 0$, тогда $9 \cdot (\overline{zu9}) = \overline{uz01}$ отсюда $u = 8$, что дает $9 \cdot (z \cdot 100 + 89) = 8000 + z \cdot 100 + 1 \Rightarrow z = 9$.

5. **Решение:** Обозначим $x = \angle CB'A' = \angle A'C'B$, $y = \angle AC'B' = \angle B'A'C$ и $z = \angle BA'C' = \angle C'B'A$, а также $a = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$ и $\gamma = \angle ACB$. Тогда сумма величин углов треугольников $AB'C'$, $A'BC'$и $A'B'C$ равна $3 \cdot 180° = \alpha + \beta + \gamma + 2x + 2y + 2z$, а сумма углов треугольника ABC

равна $180° = \alpha + \beta + \gamma$. Следовательно, $2x + 2y + 2z = 3 \cdot 180° - 180°$, откуда $x + y + z = 180°$.

Взглянув на треугольник $AB'C'$, видим: $\alpha = 180° - y - z = x$. Аналогично $\beta = y$ и $\gamma = z$. Следовательно, $AC'A'B'$ и $BC'B'A'$ - параллелограммы, а поскольку противоположные стороны любого параллелограмма равны, то $AC' = B'A' = C'B$. Аналогично $AB' = C'A' = B'C$ и $BA' = C'B' = A'C$.

6. **Решение:** Обозначим массы предметов их первыми буквами: Д(диван), Ч (чемодан), С (саквояж), К(картина, корзина, картонка), а массу маленькой собачки буквой М.

Из условия задачи Д = Ч + С(1); Д = 3К (2); К > М (3); М + С > Д (4); М + Ч > Д (5). Сложив неравенства (4) и (5) и воспользовавшись равенством (1), найдем что 2М > Д; с другой стороны, поставив условие (3) в равенство (2), найдем, что Д > 3М. Эти неравенства противоречат друг другу; из них следует, что 2М > 3М, т.е. М< 0. Таким образом, претензия дамы справедлива.

Список литературы

1. Яковлев В.Д. Городские (районные) математические олимпиады 1990-2000 гг. – г. Сыктывкар, 2004;

2. Яковлев В.Д. Городские (районные) математические олимпиады 2000-2004 гг. – г. Сыктывкар, 2005;

3. Горбачёв Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике. – М.: МЦНМО, 2004;

4. Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математика. Районные олимпиады. 6-11 классы. – М.: Просвещение, 2010;

5. Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожевников П.А. и др. Областные олимпиады. 8-11 классы. – М.: Просвещение, 2010;

6. Фёдоров Р.М. Московские математические олимпиады 1993 – 2005 г. – М.: МЦНМО, 2006;

7. Спивак А.В. Математический праздник. – М.: Бюро Квантум, 2004;

8. Горская Е.С., Гуровиц В.М. Московские математические регаты. – М.: МЦНМО, 2007.


Поздравляем
с победой в старт-лиге турнира
«Математический бой»!
Команду 7 А класса
в составе:
Кокин Алексей (капитан)
Подорова Юлия
Поляков Владислав
Терентьева Анастасия
Тупикина Дарья
МОЛОДЦЫ! ТАК ДЕРЖАТЬ!


Вниманию учащихся!
9 сентября
(в четверг)
в 31.10
в кабинете 203
7а
8б
состоится
между командами
7а и 8б классов
жеребьевка


Вниманию учащихся!
9 сентября
(в четверг)
состоится
вторая игра старт-лиги турнира
„Математический бой“
между командами 7а класса
с 13.10-13.50 – решение задач
с 14.00 – игра


Вниманию учащихся!
10 ноября (в понедельник)
в 14.40
кабинеты 203, 205
состоится
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ
БОЙ
между
командами-победителями
7а и 8б классов.