Калужина Татьяна Николаевна

МАОУ "Лицей №29" , г. Тамбов

Учитель математики

**Решение геометрических задач с использованием дополнительного построения – вспомогательной окружности.**

 При доказательстве теорем элементарной геометрии и решении задач часто используют дополнительные построения. Они являются достаточно мощным методом решения как стандартных, так и олимпиадных задач. Суть метода дополнительных построений заключается в том, что чертеж к задаче, на котором трудно заметить связи между данными и искомыми величинами, дополняется новыми элементами, после чего эти связи становятся более ощутимыми или даже очевидными.

 Отыскать удачное дополнительное построение часто бывает нелегко. Знание приемов и методов таких построений облегчает решение даже самых сложных задач.

 В рамках нашей статьи мы рассмотрим один из видов дополнительного построения – введение вспомогательной окружности.

 Введение вспомогательной окружности чаще всего связано с ситуацией, когда окружность *описывают* около треугольника, четырехугольника. Это дает возможность использовать свойства углов и отрезков в окружности.

 Ввести вспомогательную окружность, можно опираясь на следующие теоремы:

1. *Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести окружность и притом только одну. (У любого треугольника существует и притом единственная описанная окружность)* .
2. Условие принадлежности четырех точек окружности:

*Если для четырех точек плоскости A, B, M и K выполняется одно из следующих условий:*

*1)Можно указать точку, равноудаленную от рассматриваемых точек A, B, M и K;*

*2)Точки M и K расположены по одну сторону от прямой AB и при этом ∠AMB=∠AKB.*

**

*3) Точки M и K расположены по одну сторону от прямой AB и при этом ∠AMB+∠AKB=180°,*

**

*4)Точки A и В лежат на одной стороне неразвернутого угла, а точки М и K – на другой, и при этом OA·OB=OM·OK*

*5) Отрезки AB и MK пересекаются в точке О, и при этом OA·OB=OM·OK,*

*то точки A, B, M и K лежат на одной окружности.*

 *6)Если ∠AMB=∠AKB=90°, то точки A, B, M и K расположены на окружности с диаметром AB.*

 

Рассмотрим примеры таких задач.

1. (ОГЭ, задача №25)

В прямоугольном треугольнике *ABC* с прямым углом *В* проведена биссектриса угла *А.* Известно, что она пересекает серединный перпендикуляр, проведенный к стороне *ВС* в точке *К.* Найдите угол *ВСК*, если известно, что угол *АСВ* равен *40°*.

*Решение.*



 Так как биссектриса острого угла *А* прямоугольного треугольника *АВС* не может быть перпендикулярна *ВС*, то биссектриса и серединный перпендикуляр к *ВС* имеют ровно одну общую точку.

 Пусть *N* – середина *ВС*. Рассмотрим окружность, описанную около треугольника *АВС.* Пусть серединный перпендикуляр к *ВС* пересекает меньшую дугу ВС в точке *L*, тогда точка *L* является серединой этой дуги и *.* Но тогда *∠BAL=∠CAL* как вписанные углы, опирающиеся на равные дуги, а отсюда *AL* – биссектриса угла *ВАС.* Но это означает, что точка *L* совпадает с точкой пересечения серединного перпендикуляра к ВС и биссектрисой угла *ВАС.* Заметим, что *∠BCL=∠CBL* как вписанные углы, опирающиеся на равные дуги.

 Пусть *∠BCL = х°.* Четырехугольник *ACLB* – вписанный, поэтому *∠ACL+∠ABL=180*°, то есть 40°+х+90°+х= 180°, откуда х=25°.

 Так как точки K и L совпадают, то *∠BCK=∠BCL = 25°.*

*Ответ : 25°.*

1. (ВОШ, региональный этап, 2006-2007 учебный год, 9 класс)

На стороне *АС* треугольника *АВС* взята точка . Пусть *I* – центр вписанной окружности треугольника. Окружность, описанная около , вторично пересекает сторону *AB* в точке . Окружность, описанная около , вторично пересекает сторону *BC* в точке .

Докажите, что центр описанной окружности не зависит от положения точки на стороне АС.

*Решение.*

 Так как *I* – центр вписанной окружности треугольника ABC , то AI, BI и CI – биссектрисы треугольника ABC. Тогда

∠∠IA , а значит равны дуги и хорды .

Аналогично, из равенства углов следует равенство хорд . Следовательно, , а значит, точки равноудалены от точки I и лежат на окружности с центром в точке I. Т.о. точка I является центром окружности для всех описанных треугольников . Значит, центр описанной окружности не зависит от положения точки на стороне АС.

1. (ВОШ, региональный этап, 2008-2009 учебный год, 10 класс)

Вписанная в треугольник АВС окружность касается сторон ВС, СА, АВ в точках соответственно. На продолжении отрезка за точку А взята точка D, такая что AD = A. Прямые пересекают второй раз окружность в точках . Докажите, что – диаметр окружности

 *Решение.*

**Проведем перпендикуляры к прямым АВ и АС через точки , они пересекутся в точке I, I – центр вписанной в треугольник АВС окружность. Так как АD = A, A, то АD = A и следовательно, А – центр окружности , R=AD, ∠ – центральный.

Пусть ∠, ∠= - вписанный в окружность , дуга

, тогда ∠О= как угол между касательной и хордой, ∠, а следовательно, и дуга .

 и – секущие, ∠ = - ), - ),

 - , = = . Значит, – диаметр окружности

1. (ОГЭ, задача №25)

Середина *М* стороны *AD* выпуклого четырехугольника *ABCD* равноудалена от всех его вершин. Найдите *АD*, если *BC=4*, а углы *B* и *C* четырехугольника равны соответственно 128° и 112°.



*Решение.*

 Так как точка М равноудалена от всех вершин четырехугольника ABCD, то четыре точки A, B, C и D лежат на одной окружности с центром в точке М и AD - диаметр этой окружности.

 Проведем диагональ АС. Угол АСD равен 90° , так как он вписанный и опирается на диаметр AD.

 ∠ACB= ∠BCD - ∠ACD, ∠ACB= 112° - 90° = 22°.

В ABC ∠BAC = 180° - ∠ABC - ∠ACB, тогда ∠ BAC = 30°.

 ABC вписан в окружность. По следствию из теоремы синусов

 , = = 4.

Так как AD – диаметр окружности , то AD = 2R, AD= 8.

*Ответ: 8.*

1. (ВОШ, региональный этап, 2016-2017 учебный год, 10 класс)

 Окружность с центром в точке I вписана в четырехугольник АВСD. Лучи ВА и СD пересекаются в точке Р, а лучи АD и ВС пересекаются в точке Q. Известно, что точка Р лежит на окружности , описанной около треугольника АIС. Докажите, что точка Q тоже лежит на окружности .

*Решение.*

**

 Так как четырехугольник АIСР вписанный, то ∠РСI=180° - ∠РАI = ∠BAI, иначе говоря, ∠DCI=∠BAI. Центр I вписанной окружности четырехугольника лежит на биссектрисах его углов, поэтому ∠DCI = ∠BAI. Центр I вписанной окружности лежит на биссектрисах его углов, поэтому ∠DCI = ∠BСI и ∠DAI=∠BAI. Отсюда следует, что ∠DAI=∠BCI, а значит, ∠QAI=∠BCI=180° - ∠QCI.

 Из полученного равенства вытекает, что четырехугольник AICQ вписанный. Тем самым, точка Q лежит на окружности , проходящей через точки A, I и C.

1. (ВОШ, региональный этап, 2009-2010 учебный год, 9 класс)

 Пусть точки А, В и С лежат на окружности, а прямая *b* касается этой окружности в точке В.Из точки Р, лежащей на прямой *b*, опущены перпендикуляры и на прямые АВ и ВС соответственно ( точки и лежат на отрезках АВ и ВС). Докажите, что и АС перпендикулярны.

 *Решение.*

**

 Так как ∠ = ∠, то четыре точки и В лежат на одной окружности и значит, четырехугольник В - вписанный. Значит, . С другой стороны, ∠ РВ=∠АСВ.

 Поэтому ∠ С= ∠90° - ∠АC, то есть прямые и АС пересекаются под прямым углом.

1. (ВОШ, региональный этап, 2009-2010 учебный год, 11 класс)

Четырехугольник АВСD вписан в окружность с диаметром АС. Точки К и М проекции вершин А и С соответственно на прямую ВD. Через точку К проведена прямая, параллельная ВС и пересекающая АС в точке Р. Докажите, что угол КРМ прямой.

*Решение.*

Обозначим через Е точку пересечения диагоналей АС и ВD и рассмотрим случай, когда точка К лежит на отрезке ВЕ. Так как АС – диаметр, то вписанный угол СВА=90° и КР//ВС, где Р

Заметим, что ∠СВD=∠РКD=∠РАD=∠CАD, то есть четырехугольник АКРD вписан. Значит, ∠АКD=∠АРD=90°. Тогда из равенства ∠СРD=∠CMD=90° следует вписанность четырехугольника СРМD, откуда ∠ЕРМ=180°- ∠СРМ=∠ЕDС=∠ВАС=∠ВАЕ. Отсюда следует, что РМ//АВ┴ВС//КР, а значит, КР┴РМ , что значит, что угол КМР – прямой, что и требовалось доказать.

 Случай, когда К лежит на отрезке DE, рассматривается аналогично.

**Список литературы**

1. Шарыгин И.Ф. Геометрия 7-9кл.: учебник для общеобразовательных учреждений - М.:Дрофа, 2012г.
2. Гордин Р.К. ЕГЭ 2015. Задача 18, Москва, издательство МЦНМО, 2015г.
3. Методика и система оценивания (проверки) регионального этапа XXXIII Всероссийской математической олимпиады школьников 2006-2007 учебный год, Москва 2007 г.
4. Методика и система оценивания (проверки) регионального этапа XXXV Всероссийской математической олимпиады школьников 2008-2009 учебный год, Москва 2009 г.
5. Методика и система оценивания (проверки) регионального этапа XXXVI Всероссийской математической олимпиады школьников 2009-2010 учебный год, Москва 2010 г.
6. Методика и система оценивания (проверки) регионального этапа XLIII Всероссийской математической олимпиады школьников 2016-2017 учебный год, Москва 2017 г.
7. Сдам ГИА, образовательный портал для подготовки к экзаменам.