Драгунова Светлана Николаевна,

 МОУ «Средняя общеобразовательная школа №73»

 города Саратова.

Учитель математики

**ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ АНАЛОГИИ**

Оглавление

**Введение**

Глава 1. Структурно-функциональный анализ треугольника и тетраэдра

Глава 2. Эмпирические исследования треугольника и тетраэдра

Заключение

Список используемой литературы

**Введение**

*На плоскости две прямые линии не могут образовать ограниченную фигуру, а три могут образовать треугольник. В пространстве три плоскости не могут образовать ограниченное тело, а четыре могут образовать тетраэдр. Отношение треугольника к плоскости такое же, как отношение тетраэдра к пространству, поскольку и треугольник, и тетраэдр ограничены минимальным числом простых ограничивающих элементов.*

*Д. Пойа*

В 10 классе мы познакомились с новым разделом геометрии – стереометрия. Это один из интереснейших разделов, который позволяет нам мыслить более абстрактно, представлять заданные нам фигуры в пространстве. Ранее мы уже были знакомы с планиметрией (напомню, что в планиметрии мы рассматриваем фигуры, которые находятся в пределах одной плоскости). Мы заметили, что во многих случаях задачи по стереометрии решаются путем рассмотрения различных плоскостей, в которых выполняются планиметрические законы, да и множество теорем, свойств и аксиом построены по аналогии с планиметрией. После сделанного нами такого замечания, мы задумались, можно ли провести аналогию между геометрическими телами пространства и фигурами плоскости.

Цель исследования – рассмотреть геометрические аналогии.

**Задачи исследования:**

1. Изучение учебной, методической и энциклопедической литературы;
2. Определение сущности аналогии и ее видов;
3. Выделение признаков у сравниваемых объектов, находящихся во взаимной зависимости друг от друга, через доказательство различных теорем и решение задач.

**Объект исследования** – геометрические аналогии в учебниках геометрии 9, 10 и 11 классов на примере треугольника и тетраэдра.

**Предмет исследования** – треугольник и тетраэдр.

**Методы исследования:** анализ различных видов литературы, а так же проведение сравнительного анализа, выявление аналогий.

**Актуальность темы исследования** заключается в том, что традиционный курс геометрии для средней школы делится на две части: планиметрию и стереометрию.

Эти разделы остаются независимыми друг от друга, и представление о геометрии на плоскости и в пространстве как едином целом, формируется недостаточно полно.

Избежать этой односторонности в изучении геометрии может помочь широкое применение в курсе стереометрии метода аналогии.

**Степень научной разработанности проблемы.**

Аналогия – это некоторого рода сходство, но на более определенном и выражаемом с помощью различных понятий уровне. Различие между аналогией и другими видами сходства заключается в намерениях думающего. Сходные предметы согласуются между собой в каком-то отношении, и если свести это отношение, то можно рассмотреть эти сходные предметы как аналогичные. Если удается добраться до ясных понятий, то выясняется аналогия. Аналогия (греч. analogia- соответствие, сходство), сходство предметов (явлений, процессов) в каких-либо свойствах. Аналогии могут быть двух видов: 1) простая аналогия, при которой по сходству объектов в некоторых признаках заключают их сходство в других признаках; 2) распространенная аналогия, при которой из сходства явлений делают вывод о сходстве причин.

Простая и распространенная аналогия могут быть: а) строгой аналогией, при которой признаки сравниваемых объектов находятся во взаимной зависимости; б) нестрогой аналогией, при которой признаки сравниваемых объектов не находятся в явной взаимной зависимости.

Строгая аналогия применяется в научных исследованиях, в математических доказательствах, а при решении задач используется либо алгоритм, либо нестрогая аналогия с уже решенными однотипными задачами.

Аналогия является одним из самых распространенных методов научного исследования. Широкое применение аналогий часто приводит исследователя к более или менее правдоподобным предположениям о свойствах изучаемого объекта, которые могут быть затем подтверждены или опровергнуты опытом или более строгими рассуждениями.

Некоторые свойства треугольника и тетраэдра похожи, а многие геометрические понятия, связанные с треугольником, имеют пространственные аналогии.

 Например:

1. Сторона треугольника – грань тетраэдра;
2. Вписанная окружность – вписанная сфера;
3. Длина стороны – площадь грани и т.д.

Эта аналогия не только внешняя. Многие теоремы, если применить в их в формулировках планиметрические термины, соответствующие стереометрическим, превращаются в теоремы о тетраэдрах. Несколько таких теорем и задач мы рассмотрим в данной работе.

**Теоретико-методологический аспект геометрических аналогий**

**Глава 1. Структурно-функциональный анализ треугольника и тетраэдра**

Отметим какие-нибудь три точки А, В, С, не лежащие на одной прямой, и соединим их между собой отрезками АВ, ЕС, АС (рис. 1)



Мы получили геометрическую фигуру, которая называется **треугольником**.

Точки А, В, С называются **вершинами**, отрезки АВ, ВС, АС - **сторонами**, три угла – САВ, АСВ, ВАС - **углами треугольника**.

Название «треугольник» происходит от греческого слова *тригонон*. Рассмотрим произвольный треугольник АВС и точку D, не лежащую в плоскости этого треугольника. Соединив точку D с вершинами треугольника АВС, получим треугольники ВАD, ВDС и DСА. Поверхность, составленная из четырех треугольников АВС, DАВ, DВС и DСА, называется **тетраэдром** и обозначается так: DАВС. (рис. 2)



Треугольники, из которых состоит тетраэдр, называются **гранями**, их стороны - **ребрами**, а вершины - **вершинами тетраэдра.**

Тетраэдр имеет четыре грани, шесть ребер и четыре вершины. Два ребра тетраэдра, не имеющие общих вершин, называются **противоположными.** На рисунке 2 противоположными являются ребра АВ и DС, ВD и АС, АD и BC. Иногда выделяют одну из граней тетраэдра и называют ее основанием, а три другие - **боковыми гранями.**

**Виды треугольников и тетраэдров.**

Правильный треугольник – правильный тетраэдр;

Равносторонний треугольник – тетраэдр общего вида;

Равнобедренный треугольник – правильная треугольная пирамида;

Прямоугольный треугольник – тетраэдр, в котором при одной вершине все три плоских угла прямые.

Важно отметить следующий факт: не все свойства треугольника имеют аналогии среди свойств тетраэдра. Например, все высоты любого треугольника пересекаются в одной точке, но не в каждом тетраэдре можно сказать, то же самое.

Те тетраэдры, для которых такое свойство, верно, составляют класс ортоцентрических тетраэдров.

**Признаки равенства треугольников и тетраэдров.**

Признаки равенства треугольников - одна из тем, которая остается актуальной на протяжении всего курса планиметрии. В сте­реометрии признаки равенства тетраэдров не рассматриваются. И тем не менее, на мой взгляд для того, чтобы выявить аналогии необходимо рассмотреть признаки равенства тетраэдров.

Равенство треугольников и тетраэдров определяются на основе понятия наложения:

1. Два треугольника называются равными, если их можно совместить наложением.
2. Две пирамиды называются равными, если они при наложении одной в другую могут быть совмещены.

Для доказательства признаков равенства тетраэдров необходимо знать признаки равенства трехгранных углов, а именно:

1. два трехгранных угла равны, если все три плоские угла одного из них равны плоским углам другого и одинаково с ними расположены;
2. два трехгранных угла равны, если они имеют по равному двугранному углу, заключенному между двумя двугранными углами, соответственно равными и одинаково расположенными;
3. два трехгранных угла равны, если они имеют по равному плоскому углу, заключенному между двумя двугранными углами, соответственно равными и одинаково расположенными.



**Глава 2. Эмпирические исследования треугольника и тетраэдра**

Так же мы решили рассмотреть теоремы о замечательных точках треугольника и провести стереометрические аналогии. Представленная ниже таблица требуется для решения более трудных задач.



Теперь попробуем провести аналогию на примере задач.

**Задача [1]**

Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 2:1, считая от вершин.



**Доказательство:**

1. Рассмотрим произвольный треугольник АВС.

Медианы $АА\_{1}$, $ВВ\_{1}$ и $СС\_{1}$ пересекаются в одной точке (пусть эта точка будет точкой О).

1. $А\_{1}В\_{1}$ - средняя линия треугольника. $А\_{1}В\_{1}$|| АВ, <1 = <2, <3 = <4. Треугольник АОВ $\~$ треугольнику $А\_{1}ОВ\_{1}$(по двум углам).
2. $\frac{АО}{А\_{1}О}$ = $\frac{ВО}{В\_{1}О}$ = $\frac{АВ}{А\_{1}В\_{1}}$ = $\frac{1}{2}$.

АО = 2$А\_{1}О$, ВО + 2$В\_{1}О$.

1. Аналогично доказывается, что точка пересечения медиан $ВВ\_{1}$ и $СС\_{1}$ делит каждую из них в отношении 2 : 1, считая от вершины, и, следовательно, совпадает с точкой О. Все три медианы в треугольнике АВС пересекаются в точке О и делятся ею в отношении 2:1, считая от вершины.

**Задача [2]**

Четыре медианы тетраэдра пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 3 : 1, считая от вершин.



**Доказательство:**

1. Отрезки $DM\_{1}$ и $AM\_{2}$ принадлежат плоскости $ADE\_{1}$. Отрезки $DM\_{1}$ и $AM\_{2}$ пересекаются в точке О.
2. $MM\_{1}$||AD, треугольник $AE\_{1}D$ $\~$ треугольнику $M\_{1}E\_{1}M\_{2}$, значит, что $\frac{M\_{1}M\_{2}}{AD}$ = $\frac{M\_{1}E\_{1}}{AE\_{1}}$ = $\frac{1}{3}$.
3. Треугольник $M\_{1}OM\_{2}$ $\~$ треугольнику DOA, значит, что $\frac{M\_{1}O}{DO}$ = $\frac{OM\_{2}}{AO}$ = $\frac{1}{3}$.
4. Повторив рассуждения для треугольника $BE\_{5}D$и треугольника $CE\_{3}D$, мы получим, что $BM\_{3}$ и $CM\_{4}$ пересекают отрезок $DM\_{1}$ в точке, делящей его в отношении 3 : 1, считая от вершины, то есть в точке O.

 $BM\_{3}$ : $CM\_{4}$ = 3 : 1.

**Заключение**

Приступая к данному исследованию, мы ставили перед собой задачу вызвать интерес к геометрическим аналогиям. Для этого мы использовали различную литературу; выявляли признаки сравниваемых объектов, находящихся во взаимной зависимости друг от друга, через доказательства теорем и решения задач; определяли сущность аналогии и ее видов. Обнаружение сходства или различия между предметами значительно поднимает уровень нашего мышления на более высокий уровень. Существовавшие ранее без взаимосвязи знания приобрели для нас новые качества.

**Список используемой литературы**

1. Атанасян, Л. С. Геометрия. 10-11 классы [Текст] / Л. С. Атанасян. - М.: Просвещение, 2001.
2. Атанасян, Л. С. Геометрия. 7-9 классы [Текст] / Л. С. Атанасян. -М.: Просвещение, 2003.
3. Кучеров, В. Геометрические аналогии [Текст] / В. Кучеров. - М.:Бюро Квантум, 1995. - 128 с.
4. Эрдииев, О. П. Аналогия в теоремах о прямой Эйлера, окружности и сфере [Текст] / О. П. Эрдниев // Математика в школе. - 1998. - № 3
5. Никулин, А. В. Геометрия на плоскости (Планиметрия) [Текст]:учебное пособие / А. В. Никулин, А. Г. Кукуш, Ю. С. Татаренко. - Минск:ООО «Попурри», 1996. - 592 с.
6. Гетман, Э. Аналог формулы Герона в стереометрии [Текст] / Э. Гетман// Математика в школе. - 2000. - № 3.
7. Учебник – тетрадь для углубленного изучения геометрии, С. В. Алексеева, М. И. Зайкин, АГПИ им. А. П. Гайара, 2000 г.
8. Прасолов, В. В. Задачи по планиметрии. Ч. 1 [Текст] / В. В. Прасолов. -М.: Наука, 1991. -320 с.
9. Гангнус, Р. В. Геометрия: методическое пособие для высших педагогических учебных заведений и преподавателей средней школы. 4.2. Стереометрия / Р. В. Гангнус, Ю. О. Гурвиц. - М.: Учпедгиз, 1936.
10. Энциклопедический словарь юного математика [Текст]. - М.: Педагогика, 1989. -352 с.