Министерство образования и науки РФ
Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Е. К. Белый

Моральное ожидание в математических моделях экономических явлений

Учебное пособие

Петрозаводск
Издательство ПетрГУ
2010

УДК 330.4
ББК 65в631
Б439

Математический факультет ПетрГУ рекомендует к изданию учебное пособие Е. К. Белого «Моральное ожидание в математических моделях экономических явлений»

Автор выражает благодарность декану экономического факультета ПетрГУ профессору Владимиру Борисовичу Акулову, которому он обязан своим первым знакомством с экономической теорией.

Рецензенты:
С. С. Платонов, профессор каф. геометрии и топологии ПетрГУ, доктор физ. - мат. наук;
Т. В. Морозова, ведущий научный сотрудник Института экономики КарНЦ РАН, доктор экономических наук

Б439 **Белый Е. К.**

Моральное ожидание в математических моделях экономических явлений / Е. К. Белый. – Петрозаводск : Изд-во ПетрГУ, 2010. – 52 с.

ISBN 978-5-8021-1134-5

Учебное пособие предназначено для студентов математического факультета, изучающих спецкурс «Теория полезности денег», а также для всех интересующихся экономической теорией.

УДК 330.4
ББК 65в631

ISBN 978-5-8021-1134-5

Содержание

Введение

В 1738 году Даниил Бернулли в работе «Опыт новой теории измерения жребия» [5] выдвинул предположение, согласно которому приращение полезности, вызванное элементарным приращением состояния, обратно пропорционально величине состояния: $dZ = k \cdot \frac{dC}{C}$, где Z – полезность состояния, C – величина состояния, а $k > 0$ – вещественная константа. Из предположения следует логарифмическая зависимость полезности денег от их количества: $Z = k * \ln(C) + a$. Такая зависимость является примером классической функции полезности и удовлетворяет условиям:

- с увеличением количества блага его полезность растет;
- с увеличением количества потребляемого блага полезность каждой следующей его порции снижается.

Таким образом, для любой классической функции полезности $f(x)$ справедливы утверждения $f'(x) > 0$ и $f''(x) < 0$, то есть функция возрастает и выпукла вверх. Классическая функция полезности отражает поведение «человека осторожного». Действительно, пусть $f(x)$ – классическая функция полезности, а случайная величина x принимает значения x_1 и x_2 с вероятностями α и $1-\alpha$ соответственно, где $\alpha \in [0;1]$. Тогда

$$M(x) = \alpha \cdot x_1 + (1-\alpha) \cdot x_2 \text{ и}$$

$$M(f(x)) = \alpha \cdot f(x_1) + (1-\alpha) \cdot f(x_2).$$

На рисунке 1 $AB = f(M(x))$, $AC = M(f(x))$ и $AB > AC$. Математическое ожидание полезности жребия (AC) меньше полезности гарантированной суммы $M(x)$, соответствующей отрезку длины AB.

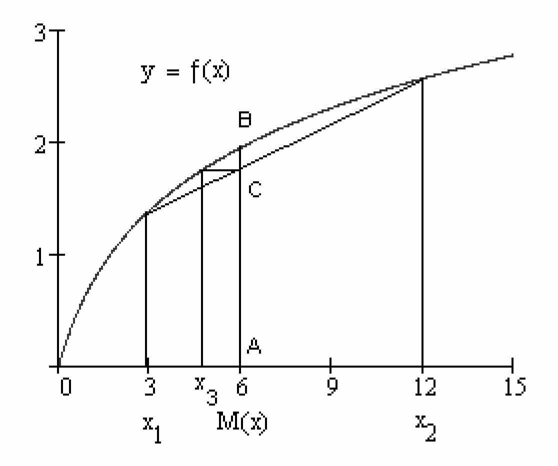

Рис. 1. Гарантированная сумма M(x) привлекательней жребия с математическим ожиданием M(x)

Как видно из рисунка, полезность жребия с математическим ожиданием $M(x)$, равную AC, можно получить, располагая гарантированной суммой x_3. Таким образом, жребий с математическим ожиданием $M(x)$ выгодно обменять на гарантированную сумму x_g, где $x_3 < x_g < M(x)$, уплатив, таким образом, сумму $M(x) - x_g$ за избавление от риска. Гарантированная сумма $x_3 < M(x)$ для нас равнозначна жребию с математическим ожиданием M(x). Следовательно, гарантированная сумма

M(x) всегда будет привлекательней жребия с математическим ожиданием M(x). Отсюда следует, что любая честная игра, если под таковой понимать игру, в которой с равной вероятностью можно выиграть или проиграть одну и ту же сумму, для нас заведомо непривлекательна. Действительно, увеличение состояния на некоторую величину ΔC дает увеличение общей полезности меньшее, чем снижение полезности при уменьшении состояния на ту же величину ΔC. Тем более непривлекательна любая лотерея, где математическое ожидание выигрыша меньше стоимости билета. Таким образом, классическая функция полезности не отражает поведение «игрока». И все-таки люди не только играют в «честные» азартные игры, но и покупают лотерейные билеты, когда стоимость билета выше математического ожидания выигрыша! Один и тот же человек может страховать себя, свой дом и машину от всех возможных неприятных случайностей, то есть платить деньги за избавление от рисков, и одновременно покупать лотерейные билеты. Таким образом, классическая функция полезности не всегда адекватно отражает поведение людей, причем людей по всем признакам вполне разумных. Поэтому около пятидесяти лет назад американский экономист, лауреат Нобелевской премии по экономике 1976 года Милтон Фридмен предположил, что график функции полезности может иметь как участки, выпуклые вверх, так и участки, выпуклые вниз. В работе [1] исследован широкий класс функций Фридмена. Однако мы преследуем достаточно скромные цели. В настоящей работе мы будем придерживаться функции полезности вида $Z = k * \ln(C) + a$. Независимо от значений a и k такая функция порождает одну и ту же оценку случайной величины x, которую Пьер Симон Лаплас назвал моральным ожиданием. Мы же будем говорить или о моральном ожидании нулевого порядка или, когда исключены недоразумения, просто о моральным ожидании. Обозначать такую оценку случайной величины будем $\overset{=}{x}$ или, когда хотим подчеркнуть ее зависимость от состояния, $M_{\text{r}}(x,C)$. Эта оценка жребия непосредственно получается из равенства

$$\ln\left(\overset{=}{x}+C\right)=\sum_{i=1}^{n} p_i\cdot\ln\left(x_i+C\right).$$

Таким образом, $M_{\text{r}}(x,C)=\overset{=}{x}=\prod_{i=1}^{n}\left(x_i+C\right)^{p_i}-C$, (1)

где p_i – вероятность значения x_i, $i=1,2\cdots n$. Математическое ожидание как обычно будем обозначать $\bar{x}$ или $M(x)$. Как уже отмечено выше, моральное ожидание нулевого порядка отражает оценку жребия «человеком осторожным». Приведем основные свойства морального ожидания нулевого порядка.

Свойства морального ожидания (нулевого порядка):

- Моральное ожидание строго монотонно возрастает с ростом величины состояния C.
- Предел морального ожидания при состоянии C, стремящемся к бесконечности, равен математическому ожиданию: $\lim\limits_{C\to\infty} Mr(x,C)=M(x)$.
- Моральное ожидание строго меньше математического: $Mr(x,C)<M(x)$.

- $Mr(x+a,C)=Mr(x,C+a)+a$, где a – произвольная вещественная константа.
- $Mr(a\cdot x,C)=a\cdot Mr\left(x,\frac{C}{a}\right)$, где a – произвольная положительная вещественная константа.
- $\lim\limits_{k\to\infty} k\cdot Mr\left(\frac{x}{k},C\right)=M(x)$, где k – натуральное число.

Доказательство перечисленных выше свойств (для морального ожидания произвольного порядка) можно найти в работе [1].

В основу настоящей работы легли материалы спецкурса «Теория полезности денег», читаемого автором для студентов математического факультета Петрозаводского госуниверситета. В работе рассмотрен ряд задач, в которых «не работает» математическое ожидание, но оценка случайной величины (жребия) по моральному ожиданию приводит к результатам, адекватным поведению реальных экономических субъектов. Особое внимание уделено оптимальному по моральному ожиданию портфелю ценных бумаг.

1. Задача страхования риска

§ 1.1. «Все или ничего»

Допустим, Вы получили возможность сыграть в следующую игру. Бросается монета и, если выпадет «орел», Вы получите сорок тысяч долларов. В противном случае – ничего! Обозначив случайную величину выигрыша x, а ее вероятность – p, составим таблицу распределения вероятностей выигрышей:

X	0	40
P	0,5	0,5

По математическому ожиданию оценка жребия равна $\bar{x} = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 40 = 20$. И вот, некто предложил Вам продать ему этот жребий за восемнадцать тысяч долларов. Как бы ни хотелось получить 40 тысяч, риск остаться ни с чем очень велик и, возможно, Вы согласитесь поменять жребий на предлагаемую гарантированную сумму. Насколько разумен будет такой поступок? В соответствии с теорией Бернулли, сделка покажется Вам привлекательной, если оценка жребия по моральному ожиданию будет меньше 18 тысяч, то есть $\bar{\bar{x}} < 18$. В случае равенства Вам безразлично, продавать жребий или нет. И так

$$C^{0,5} \cdot (C + 40)^{0,5} - C < 18 \quad \text{или} \quad \sqrt{C^2 + 40 \cdot C} < C + 18.$$

Решив последнее неравенство, получим $C < 81$. Таким образом, жребий стоит продать, если Ваше состояние меньше 81 тысячи долларов. Далее в таких случаях будем говорить, что предельное значение Продавца равно 81 тысяче. Таким образом, если Продавец уступит жребий за 18 тысяч, он заплатит 2 тысячи за избавление от риска. Здесь существенно то, что мы имеем дело не с массовым, а с единичным явлением. В соответствии с законом больших чисел, если бы владелец жребия постоянно играл в подобную игру, относительная частота выигрышей оказалась бы близкой к вероятности выпадения «орла» $p = \frac{1}{2}$ и он получал бы в среднем около 20 тысяч с игры. Тогда он категорически отверг бы предложение Покупателя продать ему жребий за 18 тысяч.

А что можно сказать о человеке, который решился купить жребий? В случае неудачи он теряет 18 тысяч, а в случае успеха приобретает $40 - 18 = 22$ тысячи. Таблица распределения вероятностей выигрышей принимает вид:

X	-18	22
P	0,5	0,5

Математическое ожидание на стороне Покупателя и равно $\bar{x} = \frac{1}{2} \cdot (-18) + \frac{1}{2} \cdot 22 = 2$, хотя интуиция подсказывает нам, что Покупатель здесь рискует больше, чем Продавец. Покупка целесообразна, если $\bar{\bar{x}} > 0$ или $\sqrt{(C - 18) \cdot (C + 22)} - C > 0$. Решив неравенство, получим $C > 99$. Значит, сделка привлекательна для Покупателя, если его состояние больше 99 тысяч долларов. Далее в таких случаях будем говорить, что предельное значение Покупателя равно 99 тысячам. Итак, сделка будет привлекательной для обеих сторон, если состояние Продавца меньше 81 тысячи, а состояние Покупателя больше 99 тысяч.

Определение 1. ***Предельным значением Продавца*** жребия будем называть такое значение его состояния, при котором ему безразлично продавать жребий или нет. Аналогично ***предельным значением Покупателя*** жребия будем называть такое значение его состояния, при котором ему безразлично покупать жребий или нет.

На этом примере мы видим, что даже если математическое ожидание на стороне игрока, бедный человек охотнее продаст жребий за небольшую, но гарантированную сумму денег, чем богатый.

§ 1.2. Задача о купце (автором задачи считается Николай Бернулли).

Купец Каюс закупил в Амстердаме товар, который он мог бы продать в Петербурге за 10000 рублей. Тогда это были огромные деньги! Товар предстоит отправить в Петербург морем. Известно, что в это время года из 100 судов 5 терпит крушение. Купец не смог найти никого, кто согласился бы застраховать груз менее чем за 800 рублей. Здесь, как и в предыдущей задаче, можно поставить следующие вопросы. Каким состоянием должен обладать купец (Продавец жребия), чтобы согласиться страховать свой товар на предложенных условиях? Каким состоянием должен обладать тот, кто взялся страховать груз (Покупатель жребия)? Таблица распределения вероятностей доходов купца принимает вид:

X	0	10000
P	0,05	0,95

Математическое ожидание дохода $\bar{x} = 9500$. Если купец застрахует груз на предложенных условиях, он может рассчитывать на гарантированные 9200 рублей. Когда он должен согласиться на такие условия страховки? Когда моральное ожидание жребия меньше 9200 рублей, то есть $\bar{\bar{x}} = C^{0,05} \cdot (C + 10000)^{0,95} - C < 9200$. Численное решение задачи дает $C < 5042$ (рис. 2). В этой задаче предельные значения мы будем округлять до целых.

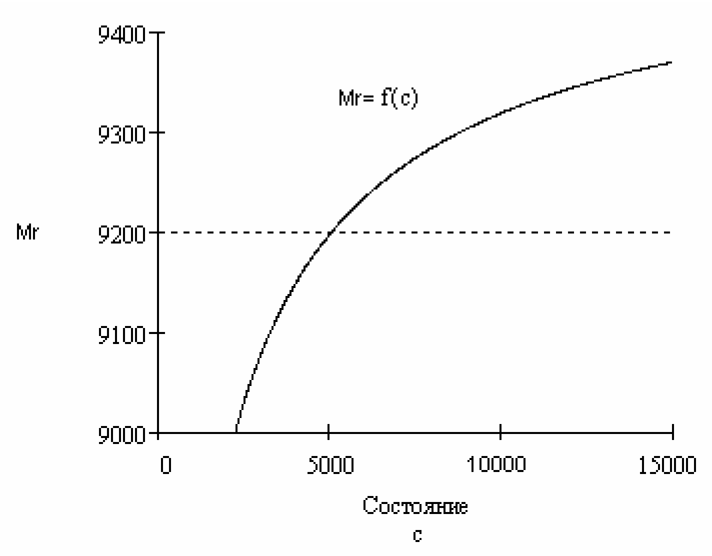

Рис. 2. Моральное ожидание дохода купца растет с ростом его состояния и достигает 9200 рублей при состоянии в 5042 рубля

Как было замечено в предыдущем пункте, на любую задачу страхования можно посмотреть с двух сторон: со стороны того, кто хочет застраховать риск, или со стороны страховщика.

Распределение вероятностей дохода страховщика задается таблицей:

X	-9200	800
P	0,05	0,95

Математическое ожидание $\bar{x} = 300$. Покупать жребий (то есть страховать купца) стоит, если моральное ожидание

$$\bar{\bar{x}} = (C - 9200)^{0,05} \cdot (C + 800)^{0,95} - C > 0 .$$

Решение последнего неравенства: $C > 14242$ (рис. 3). Таким образом, сделка должна состояться, если состояние купца меньше 5042 рублей, а состояние страховщика больше 14242 рублей.

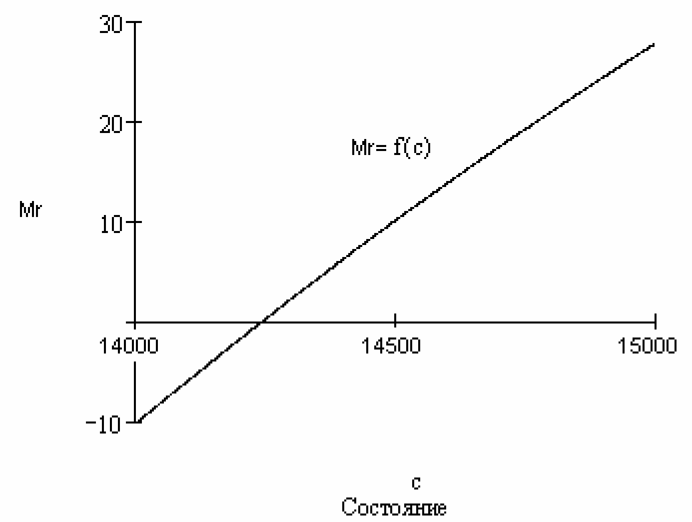

Рис. 3. Моральное ожидание дохода страховщика растет с ростом его состояния и становится положительным при состоянии больше 14242 рубля

Народная мудрость не рекомендует ложить все яйца в одну корзину. А что будет, если купец распределит свой груз поровну по двум судам? Тогда возможны три исхода: потерпели крушение оба корабля, один из двух или оба благополучно пришли в порт.
Нетрудно найти распределение вероятностей доходов и для этого случая:

X	0	5000	10000
P	0,0025	0,095	0,9025

Математическое ожидание, очевидно, по-прежнему равно 9500. Но теперь потеря всего груза становится маловероятной и предельное значение Продавца сдвинется далеко влево по вещественной оси. Продать жребий стоит, если

$$\bar{\bar{x}} = C^{0,0025} \cdot \left(C+5000\right)^{0,095} \cdot \left(C+10000\right)^{0,9025} - C < 9200 .$$

Решение неравенства: $C < 9$. Таким образом, купец застрахует груз на предложенных условиях, только если в случае потери груза он будет полностью разорен. Для страховщика распределение вероятностей доходов будет таким:

X	-9200	-4200	800
P	0,0025	0,095	0,9025

Математическое ожидание его дохода по-прежнему будет равно 300 рублей, однако страховать груз стоит, если

$$\bar{\bar{x}} = \left(C-9200\right)^{0,0025} \cdot \left(C-4200\right)^{0,095} \cdot \left(C+800\right)^{0,9025} - C > 0 .$$

Решив неравенство численно, получим $C < 9209$. Нанесем на вещественные оси предельные значения Продавца жребия (купца) и Покупателя жребия (страховщика) для случая одного судна (рис. 4a) и двух судов (рис. 4b).

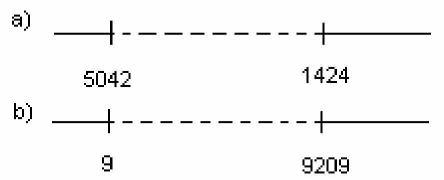

Рис. 4. Предельные значения продавца и покупателя в задаче о купце

Наблюдательный читатель заметит, что как в случае одного, так и в случае двух судов, разность предельных значений Покупателя и Продавца в точности равна той гарантированной сумме 9200, которую получит купец, если застрахует свой груз за 800 рублей. Аналогичную закономерность мы можем обнаружить и в задаче предыдущего параграфа. Случайно ли это?

§ 1.3. Разность предельных значений

Любой случай страхования риска по сути сводится к тому, что жребий с неопределенным исходом x меняется на некоторую гарантированную сумму Q. Поскольку за жребий обычно предлагают сумму, меньшую его математического ожидания, значение M(x) не дает ответа на вопрос о целесообразности страхования. Обратимся к моральному ожиданию. Продавец согласится обменять жребий за сумму Q, если его оценка жребия меньше этой суммы, то есть $Mr(x, C) < Q$. Пусть C* – решение уравнения $Mr(x, C) = Q$. Последнее уравнение имеет единственное решение в силу строго монотонного возрастания морального ожидания с ростом С. Аналогично сделка привлекательна для Покупателя, если его моральное ожидание дохода $Mr\left(x-Q,C\right)>0$. Пусть С** – решение уравнения $Mr\left(x-Q,C\right)=0$. Таким образом, С* – предельное значение Продавца жребия, а С** – предельное значение Покупателя жребия.

Из свойств морального ожидания следует $Mr\left(x-Q,C\right)=Mr\left(x,C-Q\right)-Q$.

Таким образом,
$$\begin{cases} Mr\left(x,C^{*}\right)=Q \\ Mr\left(x,C^{**}-Q\right)=Q \end{cases} \qquad (2)$$

и из строго монотонного возрастания морального ожидания следует $C^{*}=C^{**}-Q$ или $C^{**}-C^{*}=Q$.

Таким образом, ***разность предельных значений Покупателя и Продавца всегда равна гарантированной сумме Q, за которую продается жребий***. Последний результат можно обобщить и на случай морального ожидания произвольного порядка [1]. Важно только, чтобы Продавец и Покупатель «придерживались» функции полезности одного порядка.

2. Петербургский парадокс

Автором петербургского парадокса считается Николай Бернулли. Мы здесь позволим себе слегка изменить условия задачи, поменяв «дукаты» на «доллары», поскольку мало кто представляет, насколько хорошо выиграть несколько дукатов. Тогда парадокс можно сформулировать так: предлагается жребий, который состоит в том, что монета бросается до тех пор, пока не выпадет орел. Если орел выпадет при первом бросании, игрок получит 2 доллара, при втором – 4 доллара, при третьем – 8 долларов... Далее с каждым шагом величина выигрыша удваивается. После выпадения орла игра прекращается. Распределение выигрышей в этой игре можно представить в виде таблицы:

X	2	4	8	…	2^k	…
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	…	$\frac{1}{2^k}$	…

Здесь, как и прежде, x – величина, а p – вероятность выигрыша. Разумеется $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 1$.

Математическое ожидание выигрыша

$$M(x) = \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{4}\cdot 4 + \frac{1}{8}\cdot 8 + \cdots = \infty .$$

На первый взгляд, ради ожидаемого бесконечно большого выигрыша следует снять с себя последнюю рубашку и купить жребий. Однако фактически мало кто «раскошелится» больше чем на 20 долларов. Если же оценивать жребий по моральному ожиданию, теория Бернулли дает простое объяснение парадокса. На рисунке 5 показана зависимость оценки жребия по моральному ожиданию от состояния игрока. Как видно на графике, даже при довольно приличном состоянии по моральному ожиданию жребий оценивается невысоко.

Интересно, что $Mr(x,0)=4$. Таким образом, человек, все состояние которого – 4 доллара, может истратить их на покупку жребия и тогда при нулевом состоянии его оценка жребия будет в точности равна четырем долларам.

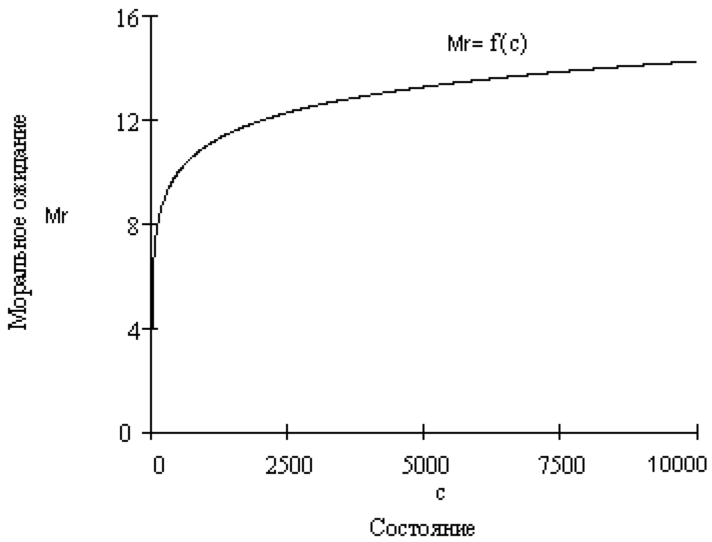

Рис. 5. Петербургский парадокс

Справедливости ради следует привести также объяснение петербургского парадокса, данное другим швейцарским математиком Габриелем Крамером. Крамер обратил внимание на тот факт, что сколь угодно больших выигрышей не бывает! Пусть, например, организаторы игры располагают суммой $2^{20}=1048576$ долларов, то есть немного больше миллиона. Тогда, начиная с 21-го шага, игрок в случае выпадения «орла» все равно получит 1048576 долларов и математическое ожидание выигрыша будет равно

$$M(x)=\sum_{i=1}^{20}\frac{1}{2^i}\cdot 2^i+2^{20}\sum_{i=21}^{\infty}\frac{1}{2^i}=20+1=21\,.$$

Заметим также, что, несмотря на бесконечное число исходов, неопределенность в этой игре довольно небольшая. Интуитивно любой из нас чувствует, что, скорее всего, игра закончится быстро. Найдем энтропию, то есть меру неопределенности данного жребия, по формуле Шеннона:

$$E=-\sum_{i=1}^{\infty}p_i\cdot\log_2\left(p_i\right).$$

Подставив в правую часть последнего равенства $p_i=\dfrac{1}{2^i}$,

мы после ряда преобразований убедимся, что энтропия этого жребия равна всего двум битам:

$$E=-\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\cdot\log_2\frac{1}{2^i}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{2^i}=2\,.$$

Петербургский парадокс иллюстрирует отношение людей к огромным, но очень маловероятным выигрышам. Такие возможности мы обычно просто не принимаем в расчет.

3. Задача Олигарха

В одном небольшом государстве намечается предвыборная кампания. За должность президента должны бороться n кандидатов. Вероятность победы i-го кандидата оценивается величиной p_i, где $i = 1 \cdots n$. Местный Олигарх, обладает состоянием S=C+R, где R – сумма, которую он хочет потратить на поддержку кандидатов. Если он выделит сумму x_i на поддержку i-го кандидата, то в случае победы последнего может рассчитывать на «благодарность» в размере $k \cdot x_i$. Вопрос: как Олигарх должен распорядиться суммой R? Если руководствоваться математическим ожиданием, он должен вложить все деньги в наиболее вероятного победителя. Однако на практике так не поступают. Опять обратимся к моральному ожиданию. Олигарх должен получить максимальную величину морального ожидания «благодарности», затратив фиксированную сумму R. То есть:

$$Mr(k \cdot x, C) \to \max \qquad \text{при ограничениях} \qquad \begin{cases} x_i \ge 0 \\ \sum\limits_i x_i = R \end{cases},$$

где $M_{\text{r}}(k \cdot x, C) = \prod\limits_{i=1}^{n} (k \cdot x_i + C)^{p_i} - C$.

Вместо максимума $\overline{\overline{k \cdot x}}$ удобней искать максимум $\ln\left(\overline{\overline{k \cdot x}} + C\right)$. Таким образом, задача сводится к нахождению максимума величины $\sum\limits_i p_i \cdot \ln(k \cdot x_i + C)$. Введем множитель Лагранжа λ.

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda) = \sum_i p_i \cdot \ln(k \cdot x_i + C) - \lambda \cdot \left(\sum_i x_i - R \right).$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} \equiv \frac{k \cdot p_i}{k \cdot x_i + C} - \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \cdot (k \cdot x_i + C) = k \cdot p_i .$$

Суммируя левую и правую части последнего равенства по i, получим

$$\lambda \cdot \left(k \cdot \sum_i x_i + n \cdot C \right) = k \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{k}{k \cdot R + n \cdot C}$$

Тогда $$x_i = \frac{p_i \cdot (k \cdot R + n \cdot C) - C}{k}. \qquad (2)$$

При этом следует исключить из рассмотрения тех кандидатов, для которых $x_i \le 0$, то есть $p_i \le \frac{C}{k \cdot R + n \cdot C}$ и повторить расчет, приняв во внимание новые оценки вероятностей на победу оставшихся кандидатов. Из равенства (2) видно, что суммы, которые следует выделить на поддержку кандидатов, являются линейными функциями их вероятностей на победу.

Подставив (2) в выражение для морального ожидания дохода Олигарха, мы получим $Mr(k \cdot x, C) = \frac{k \cdot R + n \cdot C}{2^E} - C$, где $E = -\sum_i p_i \cdot \log_2 p_i$ – энтропия, то есть мера неопределенности [7]. Таким образом, при прочих равных условиях, с ростом неопределенности, моральное ожидание жребия снижается.

Исследуем вопрос о целесообразности финансирования предвыборной кампании. Финансирование кампании имеет смысл, если $Mr(x,C) > R$, то есть, если ожидаемая отдача покрывает расходы на предвыборную кампанию.

$$\frac{k \cdot R + n \cdot C}{2^E} - C > R . \qquad (3)$$

Введем обозначение $N = 2^E$. Таким образом, N – количество равновероятных исходов, дающее значение энтропии, равное энтропии жребия Олигарха Е. Пусть α – доля состояния S, потраченная Олигархом на предвыборную кампанию. Тогда $R = \alpha \cdot S$ и $C = (1-\alpha) \cdot S$. Сделав соответствующие подстановки в (3), придем к равенству $(k-n)*\alpha > N-n$. Поскольку наибольшее значение энтропии получается в случае равенства вероятностей всех возможных исходов, всегда выполняется неравенство $N \le n$. Например, в случае Петербургского парадокса мы столкнулись с ситуацией, когда значение энтропии 2 достигается при бесконечном числе исходов. Но энтропия равна двум и при четырех равновероятных исходах. Таким образом, если «коэффициент благодарности» k больше количества кандидатов n, то есть, если $k-n>0$, финансирование компании целесообразно при любом $\alpha \in (0;1)$. Если же $k<n$, доля состояния, затраченная на предвыборную кампанию, должна удовлетворять неравенству $\alpha < \frac{n-N}{n-k}$.

4. Диверсификация портфеля ценных бумаг

Ценная бумага – документ, удостоверяющий с соблюдением установленной формы и обязательных реквизитов имущественные права, осуществление или передача которых возможны только при его предъявлении. С передачей ценной бумаги все указанные права переходят в совокупности. В определенных случаях для осуществления и передачи прав, удостоверенных ценной бумагой, достаточно доказательств их закрепления в специальном реестре (обычном или компьютеризованном).
Доходность ценной бумаги – отношение дохода, полученного инвестором за время владения ценной бумагой, к затратам на ее приобретение. Доходность обычно определяется в процентах. Также доходность ценной бумаги определяют как отношение годового дохода по ценной бумаге к ее рыночной цене, то есть как норму прибыли, получаемой владельцем ценной бумаги.
В общем случае доходность ценной бумаги величина случайная и, как правило, высокодоходные ценные бумаги являются одновременно и самыми рисковыми. Естественно желание держателя бумаг получить больше, рискуя поменьше. В идеале это недостижимо и формирование портфеля идет по пути компромисса.
Наиболее известные подходы к проблеме диверсификации портфеля ценных бумаг предполагают либо минимизацию риска при фиксированной эффективности портфеля, либо достижение максимальной эффективности при фиксированном риске [3; 149–155]. При этом обычно, как в случае портфелей Г. Марковица и Д. Тобина [3; 155–164], за меру эффективности принимают математическое ожидание доходности портфеля, а за меру риска –

вариацию доходности (то есть ее дисперсию). Такой подход вызывает ряд вопросов.

Во-первых, насколько вариация портфеля действительно отражает риск? Так, при даже не большой вариации малая вероятность полного разорения может заставить Вас отказаться от портфеля. Во-вторых, в портфелях Марковица и Тобина учитываются только такие характеристики случайных величин доходности бумаг, как их математические ожидания и вариации. Вариация двух случайных величин, то есть их ковариация является мерой линейности связи между ними. Однако на практике зависимости могут и должны иметь более сложный характер. Следовательно, здесь мы имеем дело с упрощением, благодаря которому тесная нелинейная зависимость иногда будет восприниматься как отсутствие зависимости. И наконец, выбор стратегии реальным экономическим субъектом в значительной мере зависит от его состояния, поскольку от состояния зависит сама его оценка жребия. Не может быть одна оптимальная структура портфеля ценных бумаг для бедняка и миллионера.

Моральное ожидание в отличие от математического неявно учитывает фактор риска. Таким образом, мы будем искать портфель, имеющий максимальное моральное ожидание [2, 4].

§ 4.1. Постановка и решение задачи

Чтобы избежать громоздких выражений и сохранить наглядность, рассмотрим портфель из трех ценных бумаг со случайными величинами доходности x, y и z. Пусть $p_{i,j,k}$ – вероятность появления тройки (x_i, y_j, z_k), где

$i = 1,2 \cdots n$, $j = 1,2 \cdots m$ и $k = 1,2 \cdots l$. Под доходностью ценной бумаги мы понимаем доход на единицу средств, затраченных на приобретение этой бумаги. В дальнейшем будем отождествлять случайную величину доходности бумаги с самой бумагой. Итак, в портфель можно положить одну из бумаг x, y или z или же их комбинацию с доходностью $\alpha \cdot x + \beta \cdot y + \gamma \cdot z$. Денежную сумму, затраченную на приобретение портфеля ценных бумаг, примем за единицу. Разумеется, тогда и остальное состояние покупателя должно измеряться в тех же единицах. Теперь сформулируем задачу следующим образом:

$$\overset{=}{x} \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \alpha, \beta, \gamma \geq 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ x_i + C \geq 0 \\ y_j + C \geq 0 \\ z_k + C \geq 0 \end{cases}. \qquad (4)$$

Здесь $\overset{=}{x}(\alpha, \beta, \gamma) = \prod\limits_{i,j,k} \left[\alpha \cdot x_i + \beta \cdot y_j + \gamma \cdot z_k + C\right]^{p_{i,j,k}} - C$.

Вместо максимального значения $\overset{=}{x}$ будем искать максимум $\ln\left(\overset{=}{x} + C\right)$. Для этого введем множитель Лагранжа λ и, учитывая второе из ограничений (4), рассмотрим функцию

$$F(\alpha,\beta,\gamma,\lambda)=$$
$$=\sum_{i,j,k} p_{i,j,k}\cdot\ln\left(\alpha\cdot x_i+\beta\cdot y_j+\gamma\cdot z_k+C\right)-\lambda\cdot(\alpha+\beta+\gamma-1)$$

Откуда

$$\begin{cases} F'_\alpha \equiv \sum\limits_{i,j,k} p_{i,j,k}\cdot\dfrac{x_i}{\alpha\cdot x_i+\beta\cdot y_j+\gamma\cdot z_k+C}-\lambda=0 \\ F'_\beta \equiv \sum\limits_{i,j,k} p_{i,j,k}\cdot\dfrac{y_i}{\alpha\cdot x_i+\beta\cdot y_j+\gamma\cdot z_k+C}-\lambda=0 \\ F'_\gamma \equiv \sum\limits_{i,j,k} p_{i,j,k}\cdot\dfrac{z_i}{\alpha\cdot x_i+\beta\cdot y_j+\gamma\cdot z_k+C}-\lambda=0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} M\left(\dfrac{x}{\alpha\cdot x+\beta\cdot y+\gamma\cdot z+C}\right)=\lambda \\ M\left(\dfrac{y}{\alpha\cdot x+\beta\cdot y+\gamma\cdot z+C}\right)=\lambda \\ M\left(\dfrac{z}{\alpha\cdot x+\beta\cdot y+\gamma\cdot z+C}\right)=\lambda \end{cases} \qquad (5)$$

После ряда преобразований выражений (5) получим

$$\begin{cases} M\left(\dfrac{x+C}{\alpha\cdot x+\beta\cdot y+\gamma\cdot z+C}\right)=1 \\ M\left(\dfrac{y+C}{\alpha\cdot x+\beta\cdot y+\gamma\cdot z+C}\right)=1 \\ M\left(\dfrac{z+C}{\alpha\cdot x+\beta\cdot y+\gamma\cdot z+C}\right)=1 \end{cases} \qquad (6)$$

$$\lambda = 1 - C\cdot M\left(\frac{1}{\alpha\cdot x+\beta\cdot y+\gamma\cdot z+C}\right)$$

Определение 2. Пусть x – случайная величина выигрыша. Тогда величину x+C, где C – состояние игрока, будем называть итоговой величиной. Аналогично, если x_i – одно из значений случайной величины x, то x_i+C – соответствующее итоговое значение.

Все переменные, входящие в равенства (6), должны удовлетворять ограничениям (4). Заметим, что
$\alpha\cdot x+\beta\cdot y+\gamma\cdot z+C=\alpha\cdot(x+C)+\beta\cdot(y+C)+\gamma\cdot(z+C)$
и результаты, представленные равенствами (6), можно сформулировать так: **в оптимальном портфеле математическое ожидание отношения итогового значения любой входящей в портфель бумаги к итоговому значению всего портфеля равно единице**. Сказанное верно только для бумаг, реально входящих в портфель, то есть для бумаг, доля которых в портфеле больше нуля. Равенства, аналогичные (6), нетрудно получить для любого количества ценных бумаг. Оптимальные значения $\alpha,\beta,\gamma\cdots\geq 0$ можно найти численными методами.

§ 4.2. Удаление «лишних» бумаг из портфеля

Применительно к задаче диверсификации портфеля ценных бумаг представляет интерес проблема удаления «лишних» бумаг из портфеля до решения задачи поиска оптимального портфеля. Поскольку в нашем случае задача решается численно, уменьшение количества бумаг может значительно уменьшить объем вычислений. Так, если в любом возможном наборе значений величин трех итоговых доходностей $\left(x_i, y_j, z_k\right)$ выполняется неравенство $x_i > y_j$, то первая бумага при любом исходе предпочтительней второй и вторую очевидно можно удалить из портфеля. Однако такое явное преимущество одной бумаги над другой вряд ли может наблюдаться часто. В этом разделе мы предлагаем менее очевидный критерий поиска «лишних бумаг», который позволит значительно сократить набор бумаг, претендующих на место в портфеле. При этом предложенный метод не претендует на стопроцентное удаление всех «лишних бумаг».

Для краткости введем замену переменных: x+C=X, y+C=Y и z+C=Z. Таким образом, вместо значений доходностей ценных бумаг мы будем рассматривать их итоговые значения. Разумеется, $X, Y, Z > 0$. При этом так же и итоговые доходности ценных бумаг будем отождествлять с самими бумагами.

Начнем с более простой ситуации. Для начала пусть портфель формируется из двух ценных бумаг X и Y. Тогда, если обе бумаги реально входят в портфель, должны выполняться условия

$$\begin{cases} M\left(\dfrac{X}{\alpha \cdot X + \beta \cdot Y}\right) = 1 \\ M\left(\dfrac{Y}{\alpha \cdot X + \beta \cdot Y}\right) = 1 \end{cases}, \text{ где } \begin{cases} \alpha, \beta \in (0;1) \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases}. \tag{7}$$

Вычтем из первого равенства второе и сделаем замену $\beta = 1 - \alpha$. Таким образом, оптимальная доля первой бумаги в портфеле должна удовлетворять уравнению

$$M\left(\frac{X - Y}{\alpha \cdot (X - Y) + Y}\right) = 0\,. \tag{8}$$

Введем обозначение

$$\varphi(\alpha) = M\left(\frac{X - Y}{\alpha \cdot (X - Y) + Y}\right). \tag{9}$$

Поскольку $\varphi'(\alpha) = -M\left(\left(\dfrac{X - Y}{\alpha \cdot (X - Y) + Y}\right)^2\right) < 0$, функция $\varphi(\alpha)$ строго монотонно убывает на интервале $\alpha \in [0;1]$. Значит, уравнение (8) будет иметь решение на интервале $\alpha \in (0;1)$ тогда и только тогда, когда $\begin{cases} \varphi(0) > 0 \\ \varphi(1) < 0 \end{cases}$. Подставив в (9) значения α, равные соответственно 0 и 1, получим

$$\varphi(0) = M\left(\frac{X-Y}{Y}\right) = M\left(\frac{X}{Y}\right) - 1,$$
$$\varphi(1) = M\left(\frac{X-Y}{X}\right) = 1 - M\left(\frac{Y}{X}\right).$$

Таким образом,

$$\begin{cases} M\left(\frac{X}{Y}\right) - 1 > 0 \\ 1 - M\left(\frac{Y}{X}\right) < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M\left(\frac{X}{Y}\right) > 1 \\ M\left(\frac{Y}{X}\right) > 1 \end{cases}. \qquad (10)$$

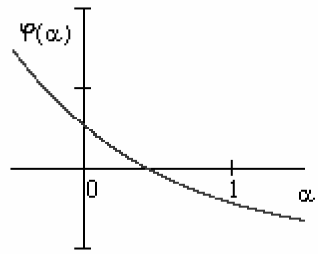

Рис. 6. График функции φ(α) на интервале [0;1]

В случае $\varphi(0) < 0$ бумага X должна быть удалена из портфеля. Аналогично при $\varphi(1) > 0$ следует удалить бумагу Y. Значит, бумага X не войдет в портфель, если

$$\begin{cases} M\left(\dfrac{X}{Y}\right) < 1 \\ M\left(\dfrac{Y}{X}\right) > 1 \end{cases}, \text{ а бумага Y, если } \begin{cases} M\left(\dfrac{X}{Y}\right) > 1 \\ M\left(\dfrac{Y}{X}\right) < 1 \end{cases}.$$

$$\text{Случай } \begin{cases} M\left(\dfrac{X}{Y}\right) < 1 \\ M\left(\dfrac{Y}{X}\right) < 1 \end{cases}$$

можно сразу исключить из рассмотрения. Действительно, среднее арифметическое больше среднего гармонического. Равенство достигается только тогда, когда случайная величина перестает быть таковой, и такая ситуация нас не интересует. Следовательно,

$$M\left(\frac{X}{Y}\right) > \frac{1}{M\left(\frac{Y}{X}\right)} \quad \Rightarrow \quad M\left(\frac{X}{Y}\right) \cdot M\left(\frac{Y}{X}\right) > 1.$$

В последнем неравенстве оба математических ожидания не могут быть меньше единицы.

Определение 3. Будем говорить, что ценная бумага X доминирует ценную бумагу Y (или Y доминируется X) и писать $X \succ Y$ (соответственно $Y \prec X$), если выполняется система неравенств $\begin{cases} M\left(\dfrac{X}{Y}\right) > 1 \\ M\left(\dfrac{Y}{X}\right) < 1 \end{cases}$.

Исследуем свойства отношения доминирования.

I. $X \prec Z$ и $Y \prec Z$ $\Rightarrow$ $\alpha \cdot X + \beta \cdot Y \prec Z$ для любых $\alpha, \beta \in (0;1)$ таких, что $\alpha + \beta = 1$.

Доказательство: $\begin{cases} M\left(\dfrac{X}{Y}\right) < 1 \\ M\left(\dfrac{Y}{X}\right) < 1 \end{cases}$ $\Rightarrow$

$$M\left(\frac{\alpha \cdot X + \beta \cdot Y}{Z}\right) = \alpha \cdot M\left(\frac{X}{Z}\right) + \beta \cdot M\left(\frac{Y}{Z}\right) < \alpha + \beta = 1.$$

Следовательно, $\alpha \cdot X + \beta \cdot Y \prec Z$, что и требовалось доказать.

II. $Z \prec X$ и $Z \prec Y$ $\Rightarrow$ $Z \prec \alpha \cdot X + \beta \cdot Y$ для любых $\alpha, \beta \in (0;1)$ таких, что $\alpha + \beta = 1$.

Доказательство:

Из выпуклости вниз функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$ следует

$$f(M(x)) < M(f(x)) \text{ или } \frac{1}{\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2} < \alpha \cdot \frac{1}{x_1} + \beta \cdot \frac{1}{x_2}.$$

Поскольку $\begin{cases} M\left(\dfrac{Z}{X}\right) < 1 \\ M\left(\dfrac{Z}{Y}\right) < 1 \end{cases}$,

$$M\left(\frac{Z}{\alpha \cdot X + \beta \cdot Y}\right) < \alpha \cdot M\left(\frac{Z}{X}\right) + \beta \cdot M\left(\frac{Z}{Y}\right) < \alpha + \beta = 1.$$

Следовательно, $Z \prec \alpha \cdot X + \beta \cdot Y$, что и требовалось доказать.

Из первых двух свойств следуют утверждения III–V.

III. Если бумага X доминируется всеми остальными бумагами, то бумагу X следует исключить из портфеля.

IV. Если бумага X доминирует все остальные бумаги, то в портфеле следует оставить единственную бумагу X.

V. Пусть бумаги, из которых формируется портфель, можно разбить на два набора A и B такие, что если $X \in A$ и $Y \in B$, то $X \succ Y$. Тогда любая комбинация бумаг из набора A доминирует любую комбинацию бумаг из набора B. Следовательно, весь набор бумаг B следует исключить из портфеля.

Однако приведенные выше утверждения не позволяют превратить процесс поиска «лишних» бумаг в формальную процедуру, поскольку имеют место также и утверждения VI–VII.

VI. Определенное таким образом отношение доминирования в общем случае не обладает свойством транзитивности, то есть из $X \succ Y$ и $Y \succ Z$ не следует отношение $X \succ Z$. Смотрите пример 4.3.3.

VII. Если в портфеле ценных бумаг ни одна из бумаг не доминирует другую это еще не означает, что все бумаги попадут в оптимальный портфель. Смотрите пример 4.3.6.

Определение 4. Пусть дан набор из m ценных бумаг с итоговыми значениями доходности $X^i = x^i + C$, где $i = 1,2 \cdots m$. Тогда матрицу Md, такую, что $Md_{i,j} = M\left(\dfrac{X^i}{Y^j}\right) = M\left(\dfrac{x^i + C}{y^j + C}\right)$, будем называть *матрицей доминант.*

§ 4.3. Примеры

Проиллюстрируем изложенную выше теорию на ряде примеров. Решая задачу диверсификации портфеля ценных бумаг, мы приняли сумму, затраченную на приобретение портфеля, за единицу. Очевидно, остальное состояние C должно измеряться в тех же единицах. Так, в примерах 4.3.1–4.3.6 мы положили $C=0,5$. Последнее означает, что некто вложил в ценные бумаги две трети своего состояния. Исходные данные представлены в виде таблиц, строки которых отражают равновероятные исходы – значения доходности $x_1, y_1 \dots$, а также итоговые значения $X_1, Y_1 \dots$

В примерах часто для каждого набора бумаг мы будем сначала находить численными методами оптимальное решение, а затем матрицу доминирования.

4.3.1 Пусть исходный портфель содержит всего 2 бумаги x и y. При этом имеется 8, представленных в таблице, равновероятных исходов (x, y).

№	x	y	X	Y
1	0,30	0,10	0,80	0,60
2	0,28	0,11	0,78	0,61
3	0,27	0,12	0,77	0,62
4	0,26	0,13	0,76	0,63
5	0,22	0,15	0,72	0,65
6	0,25	0,17	0,75	0,67
7	0,20	0,19	0,70	0,69
8	0,18	0,22	0,68	0,72

Численное решение: $(\alpha;\beta) = (1;0)$.

При этом матрица доминант имеет вид $Md = \begin{pmatrix} 1 & 1.156 \\ 0.876 & 1 \end{pmatrix}$, то есть $X \succ Y$.

4.3.2 Пусть исходный портфель опять содержит 2 бумаги x и y. Имеется 8 равновероятных исходов (x, y).

№	x	y	X	Y
1	0,30	0,18	0,80	0,68
2	0,28	0,20	0,78	0,70
3	0,27	0,25	0,77	0,75
4	0,26	0,22	0,76	0,72
5	0,22	0,26	0,72	0,76
6	0,25	0,27	0,75	0,77
7	0,20	0,28	0,70	0,78
8	0,18	0,30	0,68	0,80

Численное решение: $(\alpha;\beta)=(0.5;0.5)$.

При этом матрица доминант имеет вид $Md=\begin{pmatrix} 1 & 1.005 \\ 1.005 & 1 \end{pmatrix}$, то есть ни одна из бумаг не доминирует другую, что согласуется с численным решением.

4.3.3 Пусть исходный портфель содержит 3 бумаги x, y и z. Имеется 4 равновероятных исхода (x,y,z).

№	x	y	z	X	Y	Z
1	0,90	0,54	0,34	1,40	1,04	0,84
2	0,86	0,56	0,36	1,36	1,06	0,86
3	0,04	0,30	0,74	0,54	0,80	1,24
4	0,05	0,33	0,78	0,55	0,80	1,28

$M\left(\frac{X}{Y}\right)=0.0992$, $M\left(\frac{Y}{Z}\right)=0.941$, но $M\left(\frac{X}{Z}\right)=1.028$. То есть $X \prec Y$, $Y \prec Z$, но не имеет место отношение $X \prec Z$. Что соответствует утверждению VI о нетранзитивности отношения доминирования.

4.3.4 Исходный портфель содержит 4 бумаги x, y, z и t. Имеется 8 равновероятных исходов (x,y,z,t).

№	x	y	z	t	X	Y	Z	T
1	0,30	0,10	0,32	0,10	0,800	0,600	0,820	0,600
2	0,28	0,11	0,30	0,12	0,780	0,610	0,800	0,620
3	0,27	0,12	0,26	0,14	0,770	0,620	0,760	0,640
4	0,26	0,13	0,22	0,18	0,760	0,630	0,720	0,680
5	0,22	0,15	0,10	0,22	0,720	0,650	0,600	0,720

6	0,25	0,17	0,15	0,18	0,750	0,670	0,650	0,680
7	0,20	0,19	0,18	0,14	0,700	0,690	0,680	0,640
8	0,18	0,22	0,24	0,12	0,680	0,720	0,740	0,620

Численное решение: $(\alpha;\beta,\gamma,\delta)=(1;0;0;0)$.

Матрица доминант $Md=\begin{pmatrix} 1 & 1.156 & 1.04 & 1.151 \\ 0.8761 & 1 & 0.911 & 1.001 \\ 0.968 & 1.119 & 1 & 1.119 \\ 0.875 & 1.005 & 0.915 & 1 \end{pmatrix}$.

Как видно, первая бумага доминирует все остальные. Значит, следует взять в портфель только первую бумагу (утверждение IV), что согласуется с численным решением.

4.3.5 Исходный портфель содержит 4 бумаги x, y, z и t. Имеется 8 равновероятных исходов (x,y,z,t).

№	x	y	z	t	X	Y	Z	T
1	0,82	0,70	0,64	0,82	1,32	1,20	1,14	1,32
2	0,80	0,72	0,36	0,80	1,30	1,22	0,86	1,30
3	0,30	0,28	0,74	0,30	0,80	0,78	1,24	0,80
4	0,30	0,32	0,78	0,25	0,80	0,82	1,28	0,75
5	0,25	0,24	0,22	0,24	0,75	0,74	0,72	0,74
6	0,25	0,24	0,24	0,30	0,75	0,74	0,74	0,80
7	0,20	0,22	0,23	0,24	0,70	0,72	0,73	0,74
8	0,38	0,40	0,35	0,50	0,88	0,90	0,85	1,00

Численное решение: $(\alpha;\beta,\gamma,\delta)=(0;0;0.681;0.319)$.

Матрица доминант $Md = \begin{pmatrix} 1 & 1.018 & 0.9999 & 0.98 \\ 0.984 & 1 & 0.977 & 0.964 \\ 1.079 & 1.092 & 1 & 1.065 \\ 1.023 & 1.041 & 1.025 & 1 \end{pmatrix}$.

Таким образом, здесь исходное множество ценных бумаг разбивается на два набора $A = \{Z;T\}$ и $B = \{X;Y\}$. При этом любая бумага из первого набора доминирует любую бумагу из второго. Значит, в соответствии с утверждением V весь второй набор следует исключить из портфеля, что опять согласуется с численным решением.

4.3.6 Исходный портфель содержит 4 бумаги x, y, z и t. Имеется 8 равновероятных исходов (x, y, z, t).

№	x	y	z	t	X	Y	Z	T
1	0,86	0,70	0,34	0,82	1,360	1,200	0,840	1,320
2	0,90	0,88	0,36	0,80	1,400	1,380	0,860	1,300
3	0,30	0,28	0,74	0,30	0,800	0,780	1,240	0,800
4	0,30	0,40	0,78	0,25	0,800	0,900	1,280	0,750
5	0,25	0,27	0,22	0,24	0,750	0,770	0,720	0,740
6	0,25	0,24	0,24	0,30	0,750	0,740	0,740	0,800
7	0,25	0,26	0,18	0,24	0,750	0,760	0,680	0,740
8	0,38	0,4	0,32	0,50	0,880	0,900	0,820	1,000

Численное решение: $(\alpha;\beta,\gamma,\delta) = (0.426;0;0.176;0.398)$.

Матрица доминант $Md = \begin{pmatrix} 1 & 1.002 & 1.094 & 1.002 \\ 1.002 & 1 & 1.081 & 1.005 \\ 1.021 & 1.01 & 1 & 1.024 \\ 1.002 & 1.003 & 1.091 & 1 \end{pmatrix}$.

Здесь приведена ситуация, возможность которой зафиксирована в утверждении VII, когда ни одна из бумаг не доминирует другую, но тем не менее в портфеле есть «лишняя» бумага.

Таким образом, мы имеем возможность во многих (но не всех) случаях удалять «лишние» бумаги, исходя из вида матрицы доминант.

4.3.7. В отличии от портфелей Г. Марковица и Д. Тобина оптимальный по моральному ожиданию портфель зависит от состояния индивида. Поскольку сумму, которую он тратит на портфель, мы приняли за единицу, зависимость между состоянием и долей состояния, затраченной на портфель, будет выражаться отношениями

$$\frac{1}{1+C} = d \text{ или } C = \frac{1}{d} - 1,$$

где d – доля всего состояния, затраченная на ценные бумаги.

Пусть исходный портфель опять содержит 4 бумаги x, y, z и t. Имеется 8 равновероятных исходов (x, y, z, t), как показано в таблице.

№	x	y	z	t
1	0,40	0,70	0,90	0,40
2	0,84	0,80	0,74	0,78

3	0,90	0,80	0,90	0,90
4	0,70	0,90	0,63	0,76
5	0,68	0,70	0,80	0,74
6	0,80	0,95	0,67	0,76
7	0,60	0,90	0,52	0,68
8	0,90	0,10	0,62	0,80
m	0,728	0,731	0,723	0,727

В последней строке таблицы m – математические ожидания соответствующих бумаг. Тогда результаты расчета портфеля можно представить в виде следующей таблицы, где ДС – доля дохода, потраченная на приобретение портфеля, Mr – моральное ожидание портфеля.

ДС	α	β	γ	δ	Mr
1%	0.000	1.000	0.000	0.000	0.731
5%	0.028	0.972	0.000	0.000	0.730
6%	0.138	0.862	0.000	0.000	0.729
7%	0.216	0.784	0.000	0.000	0.729
9%	0.321	0.679	0.000	0.000	0.729
10%	0.357	0.643	0.000	0.000	0.729
20%	0.521	0.479	0.000	0.000	0.728
30%	0.575	0.425	0.000	0.000	0.727
40%	0.570	0.380	0.05	0.000	0.726
50%	0.528	0.328	0.144	0.000	0.725
60%	0.496	0.292	0.212	0.000	0.724
70%	0.432	0.261	0.253	0.054	0.724
80%	0.354	0.232	0.289	0.125	0.723
90%	0.290	0.210	0.317	0.183	0.723
95%	0.262	0.200	0.329	0.209	0.722
99%	0.237	0.192	0.338	0.233	0.722
999%	0.235	0.190	0.340	0.235	0.722

Как видно из таблицы, если доля состояния, потраченная на портфель, незначительна, разумно все эти средства вложить в ценную бумагу с наибольшим математическим ожиданием доходности (в данном случае во вторую бумагу). Ведь никому не придет в голову диверсифицировать лотерейный билет. С ростом этой доли прослеживается тенденция большей диверсификации, что соответствует нашим интуитивным представлениям о допустимом риске.

4.3.8 Сравним оптимальный по моральному ожиданию портфель с портфелем Г. Марковица, взяв исходные данные пункта 4.3.7. Мы рассмотрим портфель Марковица минимального риска, то есть с фиксированной эффективностью. Такой портфель получается в результате решения следующей оптимизационной задачи с ограничениями:

$$\begin{cases} \sum\sum x_i x_j V_{ij} \to \min \\ \sum x_i = 1 \\ \sum m_i x_i = m_p \\ x_1 \ge 0,\dots,x_n \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'Vx \to \min \\ x'e = 1 \\ x'm = m_p \end{cases}.$$

$$\text{где } e = \begin{pmatrix} 1 \\ . \\ . \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ x_n \end{pmatrix}, \quad m = \begin{pmatrix} m_1 \\ \\ \\ m_n \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} V_{11} & \cdots & V1n \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ Vn1 & \cdots & Vnn \end{pmatrix}.$$

Здесь x_i – доля i-й ценной бумаги в портфеле, m_i – математическое ожидание доходности i-й бумаги, $V_{i,j}$ – ковариация i-й и j-й бумаг, $V_p = x'Vx$ – вариация портфеля, $\sum x_i m_i = m_p$ – математическое ожидание доходности портфеля или эффективность портфеля.

Штрих здесь применяется для обозначения операции транспонирования матрицы. Решением задачи является вектор x, задающий структуру портфеля в виде равенства с матричным выражением в правой части:

$$x' = \frac{\left[\left(m'V^{-1}m\right) - m_p\left(e'V^{-1}m\right)\right]V^{-1}e + \left[m_p\left(e'V^{-1}e\right) - \left(m'V^{-1}e\right)\right]V^{-1}m}{\left(e'V^{-1}e\right)\left(m'V^{-1}m\right) - \left(m'V^{-1}e\right)^2}.$$

V^{-1} – матрица, обратная V. Таким образом, представленный выше портфель Марковица – это портфель минимальной вариации V_p (или минимального риска), обеспечивающий заданное значение m_p доходности.

Возьмем исходные данные пункта 3.4.7. Для различных значений доли состояния ДС, потраченной на приобретение портфеля, проведем следующие расчеты:

- найдем оптимальный по моральному ожиданию портфель;
- найдем его эффективность по математическому ожиданию и вариацию;
- для каждого полученного значения эффективности найдем портфель минимального риска Марковица,

обеспечивающий то же значение эффективности и его вариацию.
Результаты расчетов представлены в следующей таблице:

ДС (%)	Эффективность по мат. ожид.	Вариация ПОМО	Вариация ПМ
01	0.7313	0.0643	0.0278
05	0.7311	0.0602	0.0263
10	0.7299	0.0248	0.0186
15	0.7295	0.0184	0.0164
20	0.7293	0.0162	0.0154
25	0.7292	0.0152	0.0150
30	0.7291	0.0147	0.0145
35	0.7290	0.0144	0.0140
40	0.7287	0.0127	0.0128
45	0.7283	0.0113	0.0112
50	0.7280	0.0102	0.0102
55	0.7277	0.0094	0.0094
60	0.7275	0.0089	0.0088
65	0.7272	0.0081	0.0081
70	0.7272	0.0081	0.0081
75	0.7271	0.0078	0.0079
80	0.7269	0.0075	0.0075
85	0.7268	0.0073	0.0073
90	0.7267	0.0072	0.0071
95	0.7266	0.0070	0.0070
100	0.7265	0.0069	0.0069

Таким образом, первый столбец таблицы (ДС) – доля состояния, второй столбец – эффективность по математическому ожиданию портфеля, оптимального по моральному ожиданию (ПОМО), третий столбец – вариация ПОМО, четвертый столбец – вариация портфеля

Марковица (ПМ) минимального риска, достигающего эффективности, представленной во втором столбце.

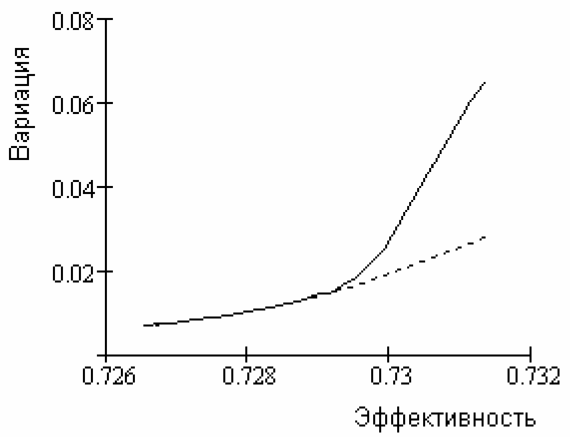

Рис. 7. Зависимость вариации портфеля от его эффективности. Сплошная линия – вариация ПОМО, штрихованная – вариация ПМ

Как видно на рисунке 7, если при заданных исходных данных на портфель потрачено более 30 % состояния, то есть, если эффективность портфеля по математическому ожиданию меньше, чем 0,729, то графики зависимости эффективность – вариация в обоих портфелях мало отличаются. Однако при этом структуры портфелей могут значительно отличаться. Далее, чем менее значительная доля состояния потрачена на портфель, тем более рискованным становится ПОМО по сравнению с соответствующим ПМ.

5. Задачи для самостоятельной работы

Во всех приведенных ниже задачах мы будем исходить из того, что все экономические субъекты оценивают жребий по моральному ожиданию в смысле (1).

5.1 Пусть в этом году состояние индивида равно C_1, а в следующем году должно достигнуть величины $C_2 > C_1$. Он хочет в этом году занять сумму S, чтобы в следующем году вернуть сумму $k * S$, где $k \in \left(0; \frac{C_2}{C_1}\right)$ – некоторый множитель. Исходя из логарифмической функции полезности z = ln(C) определить, какую сумму S следует занять индивиду, чтобы суммарная полезность его состояния за два рассмотренных года была наибольшей.

Ответ: $S = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{C_2}{k} - C_1 \right)$.

5.2. В задаче пункта 1.2 ответьте на вопрос: как должен оценить жребий индивид, состояние которого – 10 тысяч долларов?
Ответ: 10.

5.3. В задаче пункта 1.2 ответьте на вопрос: при каком состоянии жребий будет оцениваться в 12 тысяч долларов?
Ответ: 9.

5.4. Некто владеет жребием, который с равной вероятностью может привести его к потере 10 миллионов рублей или к выигрышу в 20 миллионов.
а) Чему равно математическое ожидание жребия?

b) При каком состоянии обладатель жребия согласится продать его за гарантированные 3 миллиона рублей?
c) Чему равно математическое ожидание дохода человека, купившего рассматриваемый жребий за 3 миллиона?
d) При каком состоянии целесообразно купить этот жребий за 3 миллиона рублей?

Ответы: а) 5; b) не больше 52,25; с) 2; d) 55,25.

5.5. В задаче пункта 3 (в задаче Олигарха) положим для каждого кандидата свой индивидуальный «коэффициент благодарности». Таким образом, если Олигарх выделит сумму x_i на поддержку i-го кандидата, то в случае победы последнего может рассчитывать на благодарность в размере $k_i \cdot x_i$. Остальные исходные данные – те же. Как Олигарх должен распорядиться суммой R? Ответьте на вопросы:

а) Какую сумму следует выделить i-му кандидату?

b) Чему равно моральное ожидание жребия при оптимальном распределении суммы R между кандидатами?

Ответы:

а) $x_i = p_i \cdot \left(R + C \cdot \sum_i \frac{1}{k_i} \right) - \frac{C}{k_i}$.

b) $Mr(k \cdot x, C) = \left(R + C \cdot \sum_j \frac{1}{k_j} \right) \cdot \prod_i (p_i \cdot k_i)^{p_i} - C$.

Заключение

Таким образом, во многих случаях, когда оценка случайной величины дохода (или убытка) реальными экономическими субъектами отличается от математического ожидания, моральное ожидание дает адекватные результаты. В частности, моральное ожидание отражает поведение человека в процессе страхования рисков, а также позволяет под другим углом посмотреть на проблему диверсификации портфеля ценных бумаг. Разумеется, рассмотренные в этой работе примеры не исчерпывают весь круг задач на моральное ожидание, но дают представление о возможностях применения такой оценки жребия. В настоящей работе мы ограничились рассмотрением дискретно распределенных случайных величин. Однако приведенное определение морального ожидания легко обобщается и на случай непрерывного распределения вероятностей.

Биографические справки

1) Бернулли Даниил (1700–1782) – швейцарский математик. Учился в Гейдельберге и Страсбурге. После защиты диссертации «О дыхании» в 1720 г. стал лиценциатом медицины. С 1725 по 1733 годы работал в Петербургской Академии наук сначала на кафедре физиологии, затем математики. В 1733 г. уехал в Базель, где возглавлял кафедры анатомии и ботаники, психологии (1743 г.) и физики (1750–1777 гг.). Был членом всех главных европейских научных обществ, существовавших в те дни. Внес важный вклад в развитие механики, гидродинамики, статистики и теории вероятностей.

2) Бернулли Николай (1695–1726) – швейцарский математик, философ и юрист. Академик Петербургской АН с 1725 г. Основные труды по дифференциальным уравнениям и механике.

3) Крамер Габриель (1704–1752) – швейцарский математик, один из создателей линейной алгебры. Заложил основы теории определителей, исследовал особые точки и ветви алгебраических кривых высших порядков.

4) Марковиц Гарри Макс (род. 24 августа 1927, Чикаго) – американский экономист. Окончил Чикагский университет, там же получил степень доктора. Основоположник современной портфельной теории, предложил новый подход к исследованию эффектов риска распределения инвестиций, корреляции и диверсификации ожидаемых инвестиционных доходов. Лауреат

Нобелевской премии по экономике 1990 года «за работы по теории финансовой экономики».

5) Тобин Джеймс (1918–2002) – американский экономист, учился в Гарвардском университете, там же получил степень доктора и преподавал с 1046 по 1950 годы. С 1950 года до самой смерти работал в Йельском университете. Лауреат Нобелевской премии по экономике 1981 года «за анализ состояния финансовых рынков и их влияния на политику принятия решений в области расходов, на положение с безработицей, производством и ценами».

6) Шеннон Клод Элвуд (1916–2001) – американский ученый и инженер, один из создателей математической теории информации. В 1937 г. окончил Мичиганский университет. С 1941 года советник национального исследовательского комитета Министерства обороны США. Работа Шеннона «Теория связи в секретных системах» (1945), которую рассекретили лишь в 1949 году, положила начало обширным исследованиям в теории кодирования и передачи информации. Именно благодаря этой работе криптография получила статус науки.

Список литературы

1. *Белый Е. К.* О классе допустимых функций полезности денег // Учен. зап. Петрозаводского гос. ун-та. Сер. Общественные и гуманитарные науки. № 5 (98). 2009. С. 83–89.
2. *Белый Е. К.* Диверсификация портфеля ценных бумаг и другие задачи на моральное ожидание // Труды Петрозаводского гос. ун-та. Сер. Прикладная математика и информатика. Вып. 13. 2009. С. 9–17.
3. *Белый Е. К.* Математические модели функции полезности денег. Петрозаводск: Издательство ПетрГУ, 2009, 36 с.
4. *Белый Е. К.* Моральное ожидание и задача диверсификации портфеля ценных бумаг // Учен. зап. Петрозаводского гос. ун-та. Сер. Общественные и гуманитарные науки. №1 (106). 2010. С. 77–80.
5. *Бернулли Д.* Опыт новой теории измерения жребия // Теория потребительского поведения и спроса. СПб.: Экономическая школа, 1993. С. 11–27.
6. *Малыхин В. И.* Финансовая математика. М.: Юнити, 2002. 248 с.
7. *Яглом А. М., Яглом И. М.* Вероятность и информация. М.: Наука, 1973, 512 с.

Учебное издание

Белый Евгений Константинович

Моральное ожидание в математических моделях экономических явлений

Учебное пособие

Редактор *Л. М. Колясева*
Художник обложки *А. С. Авласович*
Компьютерная верстка *Е. К. Белого*

Подписано к печати   17.05.10. Формат 60х84 1/16.
Бумага офсетная. Уч.-изд. л. 2,0. Тираж 100 экз. Изд. № 97.

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
ПЕТРОЗАВОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Отпечатано в типографии Издательства ПетрГУ
185910, г. Петрозаводск, пр. Ленина, 33